ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΕΠΛ 211: Θεωρία Υπολογισμού και Πολυπλοκότητα

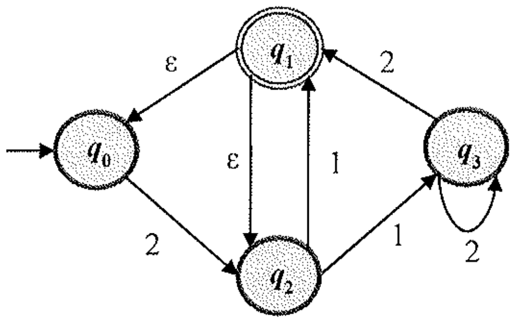
Ενδιάμεση Εξέταση

Ημερομηνία : Πέμπτη, 15 Μαρτίου 2018
Διάρκεια : 9.00 – 10.30
Διδάσκουσα : Άννα Φιλίππου

ΠΡΟΧΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Πρόβλημα 1 [30 μονάδες]

Θεωρήστε το πιο κάτω μη ντετερμινιστικό αυτόματο.



(α) **[7 μονάδες]** Να παρουσιάσετε το αυτόματο με τον τυπικό του ορισμό θεωρώντας ότι το αλφάβητό του είναι το σύνολο {1,2}. Να δείξετε ότι το αυτόματο αποδέχεται τη λέξη 21121 παρουσιάζοντας τη σχετική ακολουθία καταστάσεων που οδηγεί σε αποδοχή.

Τυπικός ορισμός αυτομάτου: (Q, Σ, δ, q_{init}, F) όπου

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
- $\Sigma = \{1,2\}$
- δ όπως τον πίνακα που ακολουθεί

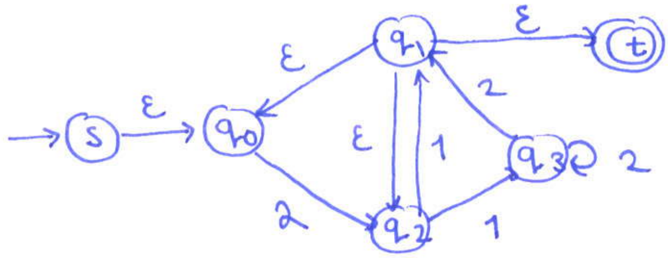
δ	1	2	ε
q_0	{}	$\{q_2\}$	{}
q_1	{}	{}	$\{q_0, q_2\}$
q_2	$\{q_1, q_3\}$	{}	{}
q_3	{}	$\{q_1, q_3\}$	{}

- $q_{init} = q_0$
- $F = \{q_1\}$

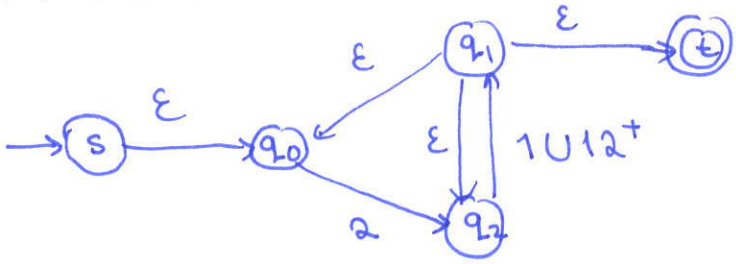
Το αυτόματο αποδέχεται τη λέξη 21121 ως εξής: $q_0 \xrightarrow{2} q_2 \xrightarrow{1} q_1 \xrightarrow{\varepsilon} q_2 \xrightarrow{1} q_3 \xrightarrow{2} q_1 \xrightarrow{\varepsilon} q_2 \xrightarrow{1} q_1$

(β) **[13 μονάδες]** Να μετατρέψετε το αυτόματο από το μέρος (α) σε κανονική έκφραση χρησιμοποιώντας τη διαδικασία που μελετήσαμε στις διαλέξεις. *Να δείξετε όλα τα στάδια της εργασίας σας. Η αφαίρεση των κορυφών να γίνει με τη σειρά, q_3, q_0, q_2, q_1.*

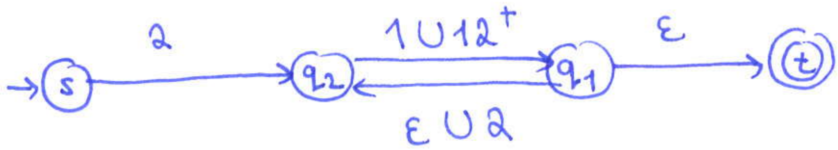
Βήμα 0: Εισαγωγή καινούριας αρχικής και καινούριας τελικής κατάστασης.



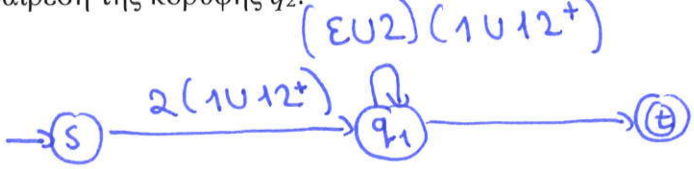
Βήμα 1: Αφαίρεση της κορυφής q_3.



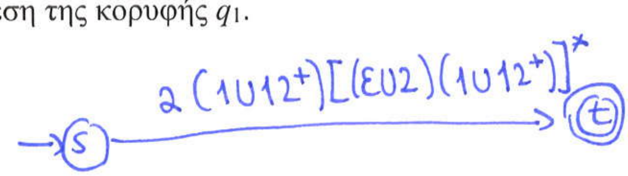
Βήμα 2: Αφαίρεση της κορυφής q_0.



Βήμα 3: Αφαίρεση της κορυφής q_2.



Βήμα 4: Αφαίρεση της κορυφής q_1.

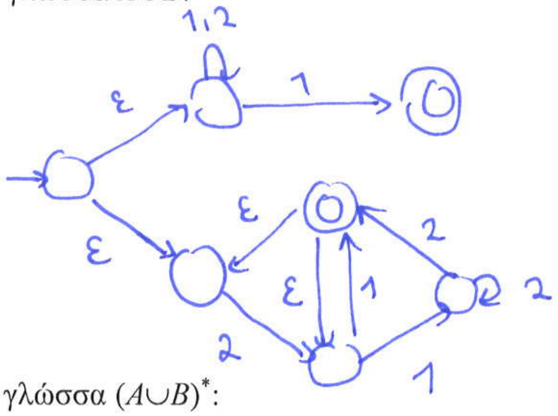


Ισοδύναμη κανονική έκφραση: $2(1\cup 12^+)[(\varepsilon\cup 2)(1\cup 12^+)]^*$

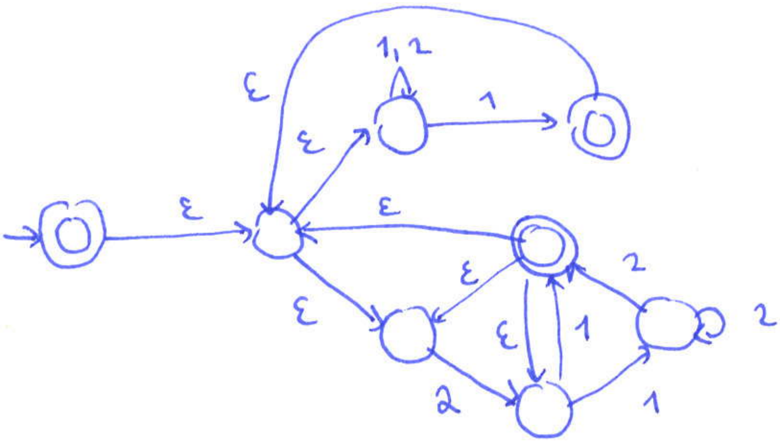
(γ) **[10 μονάδες]** Να προτείνετε αυτόματο που να αναγνωρίζει τη γλώσσα $B = \{w1 \mid w \in \{1,2\}^*\}$. Στη συνέχεια να κατασκευάσετε αυτόματο που να αποδέχεται τη γλώσσα $(A \cup B)^*$, όπου A η γλώσσα του αυτόματου από το μέρος (α).

Αυτόματο για τη γλώσσα B:

Αυτόματο για τη γλώσσα $A \cup B$:



Αυτόματο για τη γλώσσα $(A \cup B)^*$:



<u>Πρόβλημα 2</u> [20 μονάδες]

Θεωρήστε τη γλώσσα

$$L_1 = \{\, a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0 \text{ και } i + j \neq k \,\}$$

Να κατασκευάσετε ασυμφραστική γραμματική η οποία να παράγει τη γλώσσα L_1.

Να εξηγήσετε τη λειτουργία της γραμματικής σας άτυπα αλλά με σαφήνεια.

Μια γραμματική για τη γλώσσα έχει ως εξής:

$S \rightarrow aSc \mid bXc \mid A \mid C$

$X \rightarrow bXc \mid B \mid C$

$A \rightarrow aA \mid a \mid B$

$B \;\rightarrow\; bB \mid b$

$C \;\rightarrow\; cC \mid c$

Η γραμματική «κτίζει» λέξεις από έξω προς τα μέσα δημιουργώντας ζευγάρια από τα δύο άκρα της λέξης προς το κέντρο. Τα ζευγάρια αυτά είναι είτε *a-c*, είτε *b-c* τα οποία τοποθετούνται έτσι ώστε να ικανοποιείται η ζητούμενη σειρά των συμβόλων. Για να ολοκληρωθεί η δημιουργία της λέξης όμως θα πρέπει να εισαχθούν επιπρόσθετα σύμβολα είτε στο τμήμα με τα *a* και *b* είτε στο τμήμα με τα *c*, έτσι ώστε να διασφαλιστεί ότι η λέξη έχει τη μορφή $a^i b^j c^k$ και $i + j \neq k$.

Πρόβλημα 3 [35 μονάδες]
Θεωρήστε τη γλώσσα

$$L_2 = \{\ a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0 \text{ άρτιοι ακέραιοι και } i = j \text{ ή } i = k\ \}$$

Για παράδειγμα οι λέξεις *aabbcccc* και *aacc* ανήκουν στη γλώσσα, ενώ οι λέξεις *abc* και *bbaa* δεν ανήκουν στη γλώσσα.

(α) **[17 μονάδες]** Να αποδείξετε ότι η γλώσσα L_2 *δεν* είναι κανονική συμπληρώνοντας κατάλληλα τα κενά στην πιο κάτω ελλιπή απόδειξη:

Υποθέτουμε για να φτάσουμε σε αντίφαση ότι η L_2 είναι κανονική. Από το Λήμμα της Άντλησης, συνεπάγεται ότι υπάρχει ακέραιος p, το μήκος άντλησης της γλώσσας, τέτοιος ώστε κάθε λέξη $w \in L_2$, με μήκος $|w| \geq p$, μπορεί να γραφτεί ως $w = xyz$ έτσι ώστε (i) $|xy| \leq p$, (ii) $|y| > 0$ και (iii) για κάθε ακέραιο $i \geq 0$, η λέξη $xy^iz \in L_2$.

Επιλέγουμε τη λέξη w = $a^{2p} b^{2p}$.

Προφανώς $|w|$ = $4p$ $\geq p$.

Από τις συνθήκες (i) και (ii) έπεται ότι

x = a^i ,

y = a^j ,

z = $a^k b^{2p}$,

όπου $i+j+k=2p$ και $j>0$.

Επιλέγουμε i = 0 .

Τότε xy^iz = $a^{2p-j} b^{2p}$.

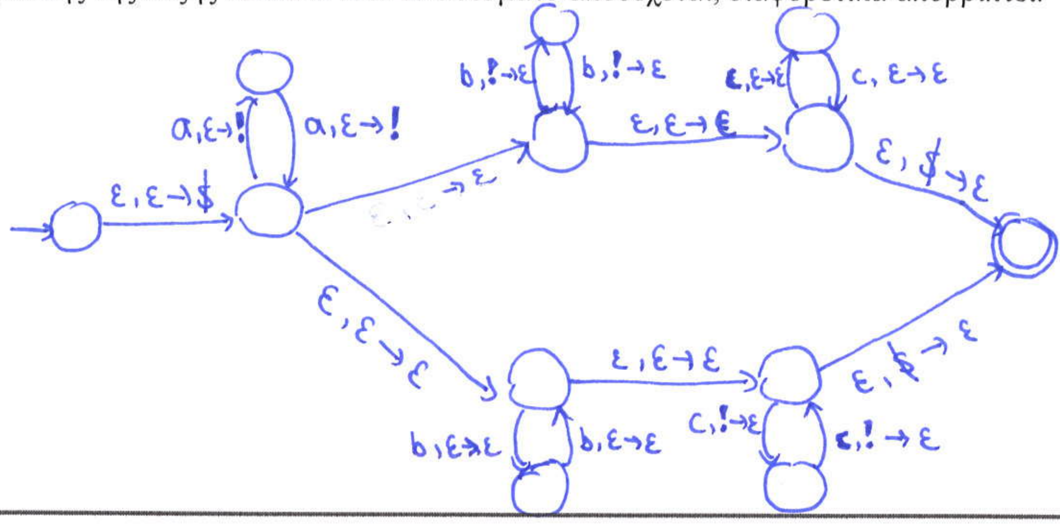
Παρατηρούμε ότι $2p-j \neq 2p$ αφού $j>0$ και επομένως η λέξη xy^0z δεν ανήκει στην L_2.

Αυτό μας οδηγεί σε αντίφαση και επομένως η γλώσσα L_2 είναι μη κανονική.

(β) **[18 μονάδες]** Να αποδείξετε ότι η γλώσσα L_2 είναι ασυμφραστική επιδεικνύοντας ένα αυτόματο στοίβας που να την αναγνωρίζει.

Να εξηγήσετε τη λειτουργία του αυτομάτου σας άτυπα αλλά με σαφήνεια.

Στο αυτόματο υπάρχουν δύο μονοπάτια από την αρχική προς την τελική κατάσταση. Το "πάνω" μονοπάτι ελέγχει την περίπτωση όπου $i = j$, και το "κάτω" μονοπάτι την περίπτωση όπου $i = k$. Και στις δύο περιπτώσεις η εκτέλεση ξεκινά με την τοποθέτηση του συμβόλου \$ στον πάτο της στοίβας έτσι ώστε να μπορούμε να αναγνωρίσουμε ότι η στοίβα είναι κενή. Στη συνέχεια το αυτόματο διαβάζει τα σύμβολα τοποθετώντας ένα '!' στη στοίβα για κάθε a που διαβάζει. Ακολούθως, στο πάνω μονοπάτι, αφαιρεί ένα '!' από τη στοίβα για κάθε b που διαβάζει, και αντίστοιχα στο κάτω μονοπάτι αφαιρεί ένα '!' για κάθε c. Το πλήθος όλων των συμβόλων (σύμφωνα με τον ορισμός της γλώσσας) πρέπει να είναι άρτιο. Αν η στοίβα αδειάσει ταυτόχρονα με την ολοκλήρωση της ανάγνωσης της λέξης εισόδου τότε το αυτόματο αποδέχεται, διαφορετικά απορρίπτει.



<u>Πρόβλημα 4</u> [15 μονάδες]

Θεωρήστε αλφάβητο Σ και γλώσσα L επί του αλφάβητου Σ.

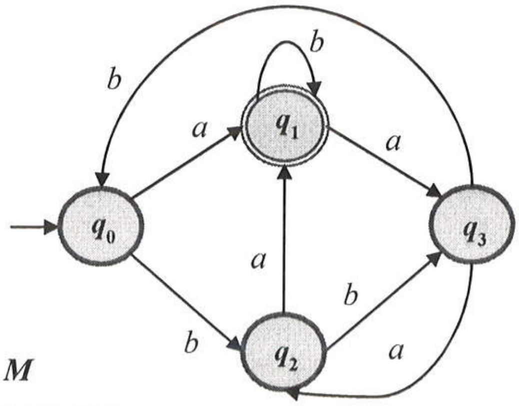
Ονομάζουμε μία λέξη $w = a_1 \ldots a_n$ *υπολέξη* μιας λέξης u αν $u = u_1\, \boldsymbol{a_1}\, u_2 \ldots u_n\, \boldsymbol{a_n}\, u_{n+1}$ για κάποιες υποσυμβολοσειρές $u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1} \in \Sigma^*$. Για παράδειγμα, η λέξη ac είναι υπολέξη της λέξης $b\boldsymbol{a}ab\boldsymbol{c}b$.

Ορίζουμε ως $Sub(L)$ την πιο κάτω γλώσσα επί του αλφάβητου Σ:

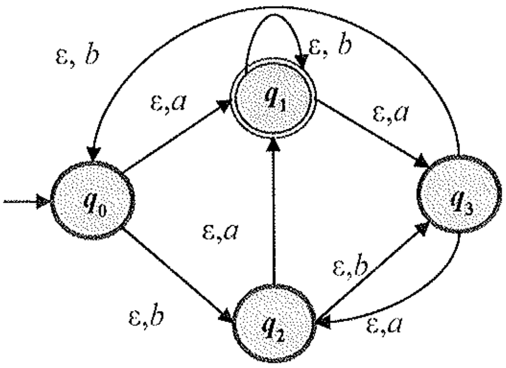
$$Sub(L) = \{\, w \mid \text{η } w \text{ είναι υπολέξη της } u \text{ για κάποιο } u \in L \,\}$$

Με λόγια, η γλώσσα $Sub(L)$ περιέχει όλες τις λέξεις που αποτελούν υπολέξεις των λέξεων της L. Για παράδειγμα, αν $L = \{abc, bb\}$ τότε $Sub(L) = \{\, \varepsilon, a, b, c, ab, ac, bc, abc, bb \,\}$.

(α) **[7 μονάδες]** Θεωρήστε το αυτόματο M που παρουσιάζεται πιο κάτω. Να κατασκευάσετε αυτόματο N το οποίο να αποδέχεται τη γλώσσα $Sub(L)$ όπου L η γλώσσα του M.



Το ζητούμενο αυτόματο είναι όμοιο με το Μ με τη διαφορά ότι προσθέτουμε μια ε-μετάβαση από κάθε κατάσταση s προς κάθε κατάσταση t εφόσον υπάρχει ακμή από την s στην t:



(β) **[8 μονάδες]** Γενικεύστε τις παρατηρήσεις σας από το μέρος (α) για να επιχειρηματολογήσετε ότι αν μια γλώσσα A είναι κανονική τότε η γλώσσα $Sub(A)$ είναι επίσης κανονική.

Για να δείξουμε το ζητούμενο, υποθέτουμε ότι $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ είναι ένα DFA αυτόματο που αναγνωρίζει τη γλώσσα A. Θα δείξουμε ότι υπάρχει NFA αυτόματο που αναγνωρίζει τη γλώσσα $Sub(A)$. Το αυτόματο αυτό είναι το αυτόματο $N = (Q, \Sigma, \delta', q_0, F)$, όπου

$$\delta'(q,a) = \begin{cases} \{\delta(q,a)\} & \alpha\nu\ a \neq \varepsilon \\ \{\delta(q,b) | b \in \Sigma\} & \alpha\nu\ a = \varepsilon \end{cases}$$

Το αυτόματο μπορεί να ακολουθήσει οποιαδήποτε ακμή του καινούριο αυτόματου, είτε διαβάζοντας το σχετικό σύμβολο από το αρχικό αυτόματο, είτε παραλείποντας να διαβάσει το σύμβολο (μετάβαση ε). Με αυτό τον τρόπο καταλήγοντας στην τελική κατάσταση το αυτόματο θα πρέπει να έχει διαβάσει μια υπολέξη του αρχικού αυτόματου.

Αυτό μπορούμε να αποδείξουμε και τυπικά ως εξής:

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι $w \in L(N)$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει λέξη $u \in L(M)$ τέτοια ώστε η w να είναι υπολέξη της u. Η w μπορεί να γραφτεί στη μορφή $w = w_1w_2\ldots w_m$ όπου κάθε $w_i \in \Sigma_\varepsilon$, και υπάρχει ακολουθία καταστάσεων $r_0, r_1, \ldots, r_m \in Q$ τέτοια ώστε

- $r_0 = q_0$
- Για κάθε $i = 0,\ldots,m-1$, $r_{i+1} \in \delta'(r_i, w_{i+1})$, και
- $r_m \in F$

Τότε, από τον ορισμό του N, για κάθε σύμβολο w_i, υπάρχει σύμβολο u_i τέτοιο ώστε, αν $w_i \neq \varepsilon$, τότε $w_i = u_i$, και για $u = u_1u_2\ldots u_m$ και την ακολουθία καταστάσεων $r_0, r_1, \ldots, r_m$ ισχύει ότι

- $r_0 = q_0$
- Για κάθε $i = 0,\ldots,m-1$, $r_{i+1} = \delta(r_i, u_{i+1})$, και
- $r_m \in F$

Προφανώς η w είναι υπολέξη της u και επίσης $u \in L(M)$.

Η αντίθετη κατεύθυνση, σύμφωνα με την οποία αν $w \in Sub(A)$ τότε $w \in L(N)$, ακολουθεί όμοια επιχειρήματα.