Σειρά Προβλημάτων 3 – Λύσεις

Άσκηση 1

Να δώσετε ασυμφραστικές γραμματικές που να παράγουν τις πιο κάτω γλώσσες:

(α) { $1^p+1^q=1^r$ | p + q = r, p,q,r > 0 }

(Παράδειγμα: λέξεις της γλώσσας περιλαμβάνουν τις 11+1=111, 1111+11111=111111111.)

(β) { w | w $\in$\{0,1\}* και η w δεν είναι καρκινική λέξη (δεν είναι παλίνδρομο)}

(γ) { w |w $\in$ L($(ab)^m(a^*ba^*)(b^{2m}\cup(ba)^{m+2})$), m $\geq$ 0 }

Λύση

(α) Μια γραμματική για τη γλώσσα έχει ως εξής:

$S \rightarrow 1T1$

$T \rightarrow 1T1 \mid +1P1$

$P \rightarrow 1P1 \mid =$

Η μεταβλητή S τοποθετεί το σύμβολο 1 στην αρχή και στο τέλος της λέξης και προσδιορίζει ότι στη συνέχεια η κατασκευή λέξεων θα ακολουθήσει τη μεταβλητή T. Η μεταβλητή T δίνει δύο επιλογές: είτε την εισαγωγή για ακόμα ένα ζευγάρι από 1 στο πρώτο και στο τρίτο τμήμα από 1, είτε την ολοκλήρωση του πρώτου τμήματος με την εισαγωγή του συμβόλου + και στη συνέχεια τοποθέτηση ενός συμβόλου 1 μετά από το + και ενός συμβόλου 1 στο τρίτο τμήμα από 1 της λέξης. Στη δεύτερη περίπτωση, η κατασκευή της λέξης συνεχίζεται μέσω της μεταβλητής P η οποία επιτρέπει την εισαγωγή περαιτέρω 1 στο δεύτερο και τρίτο τμήμα της λέξης ή την ολοκλήρωση της λέξης με τοποθέτηση του =.

(β) Μια γραμματική για τη γλώσσα έχει ως εξής:

$S \rightarrow 0S0 \mid 1S1 \mid 0T1 \mid 1T0$

$T \rightarrow 0T \mid 1T \mid \varepsilon$

Η μεταβλητή S δημιουργεί λέξεις τοποθετώντας το ίδιο σύμβολο στην αρχή και το τέλος της λέξης μέχρι που, για να προχωρήσει στη μεταβλητή T η οποία επιτρέπει την ολοκλήρωση της λέξης, απαιτεί την τοποθέτηση διαφορετικών συμβόλων στα δύο άκρα της.

(γ) Μια γραμματική για τη γλώσσα έχει ως εξής:

$S \rightarrow abTbb \mid Xbaba \mid R \mid Rbaba$

$T \rightarrow abTbb \mid R$ $\qquad X \rightarrow abXba$

$R \rightarrow ARA \mid b$ $\qquad A \rightarrow aA \mid \varepsilon$

Η μεταβλητή S προσφέρει 4 επιλογές: (1) τη δημιουργία λέξεων της μορφής $(ab)^m(a^*ba^*)(b^{2m})$, m>0, (2) τη δημιουργία λέξεων της μορφής $(ab)^m(a^*ba^*)(ba)^{m+2}$, m>0, (3) τη δημιουργία λέξεων της μορφής a*ba*, και (4) τη δημιουργία λέξεων της μορφής a*ba*(baba). Η πρώτη κατηγορία λέξεων προκύπτει μέσω του πρώτου κανόνα για τη μεταβλητή S και στη συνέχεια μέσω της μεταβλητής T η οποία διασφαλίζει ότι το πλήθος των ab στην αρχή της λέξης είναι ίσο με το πλήθος των bb στο τέλος της. Η δεύτερη κατηγορία λέξεων προκύπτει μέσω του δεύτερου κανόνα για τη μεταβλητή S και στη συνέχεια μέσω της μεταβλητής X. Τέλος, η μεταβλητή R, κτίζει το μεσαίο τμήμα της λέξης που περιγράφεται από την κανονική έκφραση a*ba*.

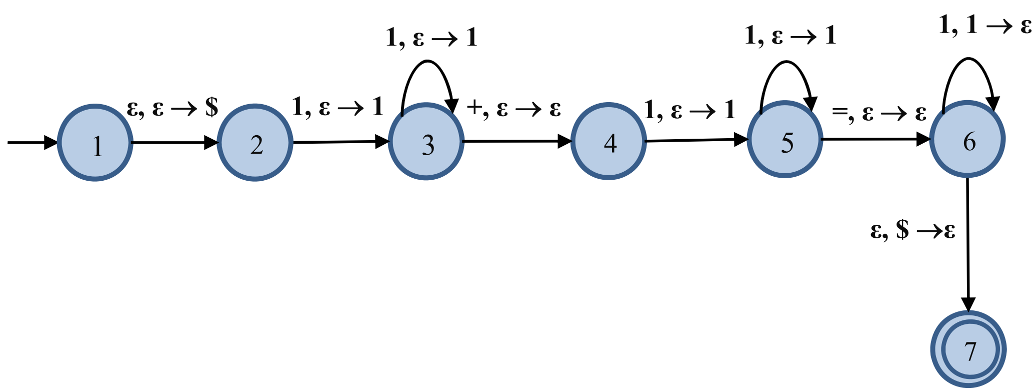
Άσκηση 2

Να κατασκευάσετε αυτόματα στοίβας για τις γλώσσες της Άσκησης 1. *(Να κτίσετε τα αυτόματα κατευθείαν και όχι μέσω μετατροπής των γραμματικών από την Άσκηση 1.)*

(α) { $1^p+1^q=1^r$ | p + q = r, p,q,r > 0 }

<u>Λύση:</u>

Ακολουθεί το ζητούμενο αυτόματο.

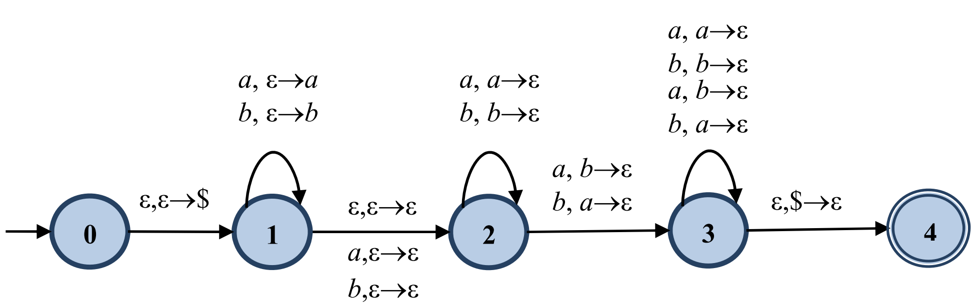


Ξεκινώντας, το αυτόματο τοποθετεί το σύμβολο $ στη στοίβα έτσι ώστε να αναγνωρίζει ότι η στοίβα είναι κενή. Στη συνέχεια, διαβάζει ένα ή περισσότερα 1 και τα τοποθετεί στη στοίβα. Συνεχίζει διαβάζονται το σύμβολο + και ένα ή περισσότερα 1 τα οποία επίσης τοποθετεί στη στοίβα. Μετά από το σύμβολο = διαβάζει όσα σύμβολα 1 ακολουθήσουν αφαιρώντας ένα 1 από τη στοίβα για κάθε ένα από αυτά. Εάν με την ολοκλήρωση της λέξης αδειάσει η στοίβα, το αυτόματο αποδέχεται.

(β) { w | w ∈{0,1}* και η w δεν είναι καρκινική λέξη (δεν είναι παλίνδρομο)}

<u>Λύση:</u>

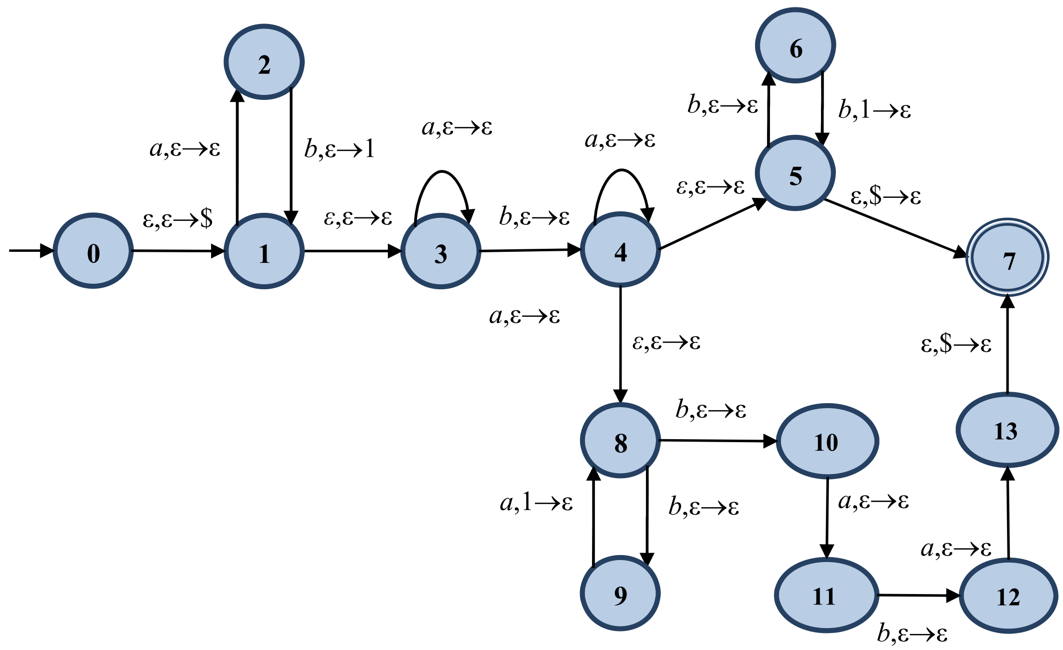
Το ζητούμενο διαβάζει και αποθηκεύει το πρώτο τμήμα «μισό» της λέξης (για λέξεις περιττού μήκους αγνοεί το μεσαίο σύμβολο (μετάβαση 1→2)). Στη συνέχεια διαβάζει το δεύτερο μισό της λέξης συγκρίνοντας τα σύμβολα εισόδου με τα σύμβολα της στοίβας. Εφόσον το δεύτερο μισό διαφέρει σε τουλάχιστο μια θέση από το πρώτο μισό (μετάβαση 2→3), το αυτόματο είναι σε θέση να αποδεχθεί τη λέξη.



(γ) { w |w ∈ L($(ab)^m(a^*ba^*)(b^{2m}\cup(ba)^{m+2})$), m ≥ 0 }

<u>Λύση:</u>

Ακολουθεί το ζητούμενο αυτόματο. Από την αρχική κατάσταση το αυτόματο γράφει \$. Στη συνέχεια διαβάζει μια ακολουθία από ab των οποίων «μετρά» το πλήθος μέσω της στοίβας. Στη συνέχεια διαβάζει λέξεις της κανονικής έκφρασης a*ba* και διασπάζεται σε δύο κλάδους κάθε ένας από τους οποίους διαβάζει λέξεις των μορφών b^{2m} (μετάβαση 4→5) και $(ba)^{m+2}$ (μετάβαση 4→8).



Άσκηση 3

Θεωρήστε τη γραμματική G = (V, Σ, R, Nouns), όπου V = {Nouns, Adjectives, Noun, Adjective}, Σ = { and, blue, bright, warm, extraordinary, zesty, shawl, sky, day, smile, soup **} και R οι πιο κάτω κανόνες.**

Nouns	→	Nouns and Nouns | Adjectives Nouns | Noun
Adjectives	→	Adjectives and Adjectives | Adjective
Adjective	→	blue | bright | warm | extraordinary | zesty
Noun	→	shawl | sky | day | smile | soup

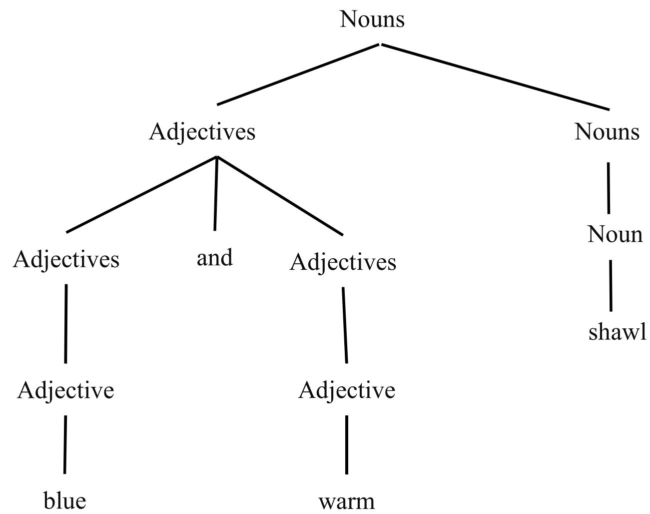
(α) Να κατασκευάσετε παραγωγές και τα αντίστοιχα συντακτικά δέντρα για τις λέξεις:

(i) blue and warm shawl

(ii) bright sky and extraordinary day

Λύση:

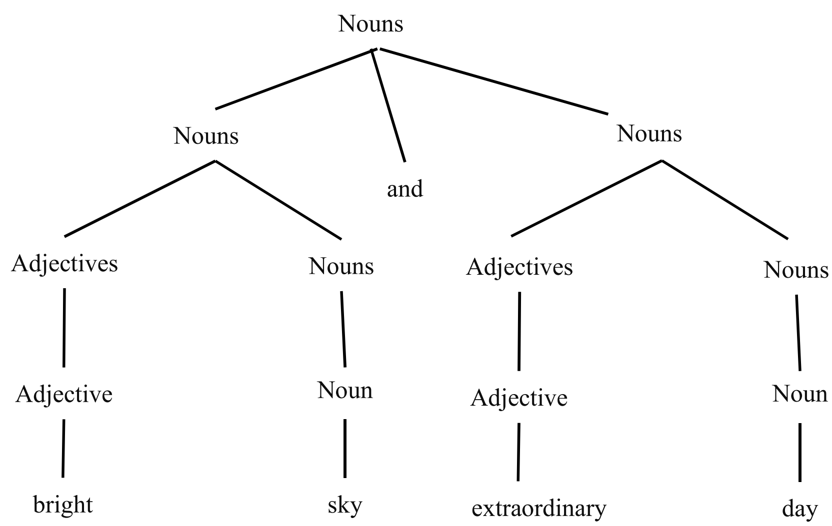
(i) Συντακτικό Δέντρο:



Παραγωγή:

Nouns $\Rightarrow$ Adjectives Nouns
$\Rightarrow$ Adjectives and Adjectives Nouns
$\Rightarrow$ Adjective and Adjectives Nouns
$\Rightarrow$ Adjective and Adjective Nouns
$\Rightarrow$ Adjective and Adjective Noun
$\Rightarrow^3$ blue and warm shawl

(ii) Συντακτικό Δέντρο:



Παραγωγή:

Nouns $\Rightarrow$ Nouns and Nouns
$\Rightarrow$ Adjectives Nouns and Adjectives Nouns
$\Rightarrow^4$ Adjective Noun and Adjective Noun
$\Rightarrow^4$ bright sky and extraordinary day

(β) Να εντοπίσετε λέξη w που να παράγεται από τη γραμματική G μέσω δύο διαφορετικών συντακτικών δέντρων, T_1 και T_2, και να εξηγήσετε τη σημασιολογική διαφορά που προσδίδουν τα δύο συντακτικά δέντρα.

<u>Λύση:</u>

Θεωρούμε τη λέξη *bright day and smile*. Η λέξη αυτή θα μπορούσε να ερμηνευθεί τόσο ως την πρόταση όπου το επίθετο *bright* αναφέρεται μόνο στο *day* αλλά και ως την πρόταση όπου το επίθετο αναφέρεται και στα δύο αντικείμενα. Οι σχετικές εξ αριστερών παραγωγές φαίνονται πιο κάτω.

1. Nouns $\Rightarrow$ Adjectives Nouns
$\Rightarrow$ Adjective Nouns
$\Rightarrow$ bright Nouns
$\Rightarrow$ bright Nouns and Nouns
$\Rightarrow$ bright Noun and Nouns
$\Rightarrow$ bright day and Nouns
$\Rightarrow$ bright day and Noun
$\Rightarrow$ bright day and smile
2. Nouns $\Rightarrow$ Nouns and Nouns
$\Rightarrow$ Adjective Nouns and Nouns
$\Rightarrow$ bright Nouns and Nouns
$\Rightarrow$ bright Noun and Nouns
$\Rightarrow$ bright day and Noun
$\Rightarrow$ bright day and smile

Επομένως η γραμματική είναι πολύτροπη.

(γ) Να προτείνετε μια καινούρια γραμματική που να παράγει την ίδια γλώσσα με τη G αλλά να είναι μονότροπη. Εξηγήστε σύντομα την απάντησή σας.
<u>Λύση</u>

Nouns	$\rightarrow$	Nouns and Nouns | Adjectives Noun | Noun
Adjectives	$\rightarrow$	Adjectives and Adjectives | Adjective
Adjective	$\rightarrow$	blue | bright | warm | extraordinary | zesty
Noun	$\rightarrow$	shawl | sky | day | smile | soup

Η πιο πάνω γραμματική εξαναγκάζει την εφαρμογή επιθέτων μόνο σε ένα ουσιαστικό. Με αυτό τον τρόπο επιτρέπει την ερμηνεία της παραγωγής 2 από το σκέλος (β) αλλά όχι την ερμηνεία της παραγωγής 1.

<u>*Άσκηση 4*</u>

Να δείξετε ότι οι πιο κάτω γλώσσες δεν είναι ασυμφραστικές χρησιμοποιώντας το Λήμμα της Άντλησης για Ασυμφραστικές Γλώσσες.

(α) { x#y | x, y $\in$\{0,1\}* και η λέξη x είναι υπολέξη της λέξης y }

<u>Λύση</u>
Υποθέτουμε για να φτάσουμε σε αντίφαση ότι η γλώσσα, την οποία θα αποκαλούμε $Λ_1$, είναι ασυμφραστική. Τότε, σύμφωνα με το Λήμμα της Άντλησης, υπάρχει *p*, το μήκος

άντλησης της γλώσσας, τέτοιο ώστε κάθε λέξη της γλώσσας με μήκος μεγαλύτερο από p να ικανοποιεί την ιδιότητα που περιγράφεται στο λήμμα.

Ας επιλέξουμε τη λέξη $w = 0^p1^p\#0^p1^p$ και ας ονομάσουμε τα τμήματα της λέξης ως Α, Β, Γ, Δ, Ε όπου $Α=0^p$, $Β=1^p$, Γ = #, $Δ = 0^p$, $Ε = 1^p$, w = ΑΒΓΔΕ.

Τότε, σύμφωνα με το λήμμα, $w = uvxyz$ έτσι ώστε η υπολέξη vxy περιέχει το πολύ p σύμβολα ($|vxy| \leq p$), τουλάχιστον μία από τις v και y να είναι μη κενή ($|vy|> 0$) και οποιαδήποτε ταυτόχρονη επανάληψη ή αφαίρεση των υπολέξεων v και y να διατηρεί την προκύπτουσα λέξη εντός της γλώσσας ($uv^ixy^iz \in Λ_1$, $i \geq 0$).

Αφού $|vxy| \leq p$, διακρίνουμε τις πιο κάτω περιπτώσεις.

- Αν τα v και y εκτείνονται στο τμήμα Α τότε αν αντλήσουμε τα τμήματα v και y, η λέξη που θα προκύψει θα έχει τη μορφή $0^{p+λ+μ}1^p\#0^p1^p$, όπου $v = 0^λ$ και $y = 0^μ$. Προφανώς η λέξη δεν ανήκει στη γλώσσα αφού η λέξη αριστερά από το # δεν είναι υπολέξη της λέξης δεξιά από αυτό. Παρόμοια μπορούμε να χειριστούμε τις περιπτώσεις όπου τα v και y εκτείνονται μόνο στο Β ή στα τμήματα Α και Β.
- Αν τα v και y περιλαμβάνουν το τμήμα Γ=# και τα αντλήσουμε, τότε η λέξη που θα προκύψει θα περιέχει περισσότερα από ένα #και η λέξη δεν θα ανήκει στη γλώσσα.
- Αν τα v και y εκτείνονται στο τμήμα Δ τότε, αν αφαιρέσουμε τα τμήματα v και y, η λέξη που θα προκύψει θα έχει τη μορφή $0^p1^p\#0^{p-λ-μ}1^p$, όπου $v = 0^λ$ και $y = 0^μ$. Προφανώς η λέξη δεν ανήκει στη γλώσσα αφού η λέξη αριστερά από το # δεν είναι υπολέξη της λέξης δεξιά από αυτό. Παρόμοια μπορούμε να χειριστούμε τις περιπτώσεις όπου τα v και y εκτείνονται μόνο στο Ε ή στα τμήματα Δ και Ε.
- Τέλος, αν τα v και y εκτείνονται στα τμήματα Β και Δ, αντίστοιχα, τότε αν αντλήσουμε τα τμήματα v και y, η λέξη που θα προκύψει θα έχει τη μορφή $0^p1^{p+λ}\#0^{p+μ}1^p$, όπου $v = 0^λ$ και $y = 0^μ$. Προφανώς η λέξη δεν ανήκει στη γλώσσα αφού η λέξη αριστερά από το # δεν είναι υπολέξη της λέξης δεξιά από αυτό.

Αυτό μας οδηγεί σε αντίφαση και επομένως η υπόθεσή μας ότι η γλώσσα $Λ_1$ είναι ασυμφραστική ήταν εσφαλμένη.

Συμπέρασμα: Η $Λ_1$ είναι μη ασυμφραστική.

(β) $\{ w \mid w = (ab)^{2m}b^m(ba)^m, m \geq 0 \}$

<u>Λύση</u>

Υποθέτουμε για να φτάσουμε σε αντίφαση ότι η γλώσσα, την οποία θα αποκαλούμε $Λ_2$ είναι ασυμφραστική. Τότε, σύμφωνα με το Λήμμα της Άντλησης, υπάρχει p, το μήκος άντλησης της γλώσσας, τέτοιο ώστε κάθε λέξη της γλώσσας με μήκος μεγαλύτερο από p να ικανοποιεί την ιδιότητα που περιγράφεται στο λήμμα.

Ας επιλέξουμε τη λέξη $w = (ab)^{2p}b^p(ba)^p$ και ας ονομάσουμε τα τμήματα της λέξης ως Α, Β, Γ, όπου $Α=(ab)^{2p}$, $Β=b^p$, $Γ = (ba)^p$.

Τότε, σύμφωνα με το λήμμα, $w = uvxyz$ έτσι ώστε η υπολέξη vxy περιέχει το πολύ p σύμβολα ($|vxy| \leq p$), τουλάχιστον μία από τις v και y να είναι μη κενή ($|vy|> 0$) και οποιαδήποτε ταυτόχρονη επανάληψη/αφαίρεση των υπολέξεων v και y να διατηρεί την προκύπτουσα λέξη εντός της γλώσσας ($uv^ixy^iz \in Λ_2$, $i \geq 0$).

Αφού $|vxy| \leq p$, τότε η λέξη αυτή δεν μπορεί να εκτείνεται σε περισσότερα από δύο τμήματα της λέξης. Διακρίνουμε τις πιο κάτω περιπτώσεις.

- Αν η *vxy* εκτείνεται μόνο στο τμήμα Α και αφαιρέσουμε τα τμήματα v και y, η λέξη που θα προκύψει δεν θα ανήκει στη γλώσσα μας για τον λόγο ότι το τμήμα Α δεν έχει πια τη ζητούμενη σχέση με τα τμήματα Β και Γ.
- Αν η *vxy* εκτείνεται μόνο στο τμήμα Β ή μόνο στο τμήμα Γ, τότε τα v και y θα αποτελούνται μόνο από *b* ή μόνο από *ba*. Επομένως, αν αφαιρέσουμε τα τμήματα v και y, η λέξη που θα προκύψει δεν θα ανήκει στη γλώσσα μας για τον λόγο ότι το συγκεκριμένο τμήμα δεν θα έχει πια τη ζητούμενη σχέση με το τμήμα Α.
- Αν η *vxy* εκτείνεται τόσο ανάμεσα στο τμήμα Α όσο και ανάμεσα στο τμήμα Β και τα αντλήσουμε, η λέξη που θα προκύψει δεν θα ανήκει στη γλώσσα μας για τον λόγο ότι το τμήμα Γ δεν θα έχει πια τη ζητούμενη σχέση με τα προηγούμενα τμήματα.
- Τέλος, αν η *vxy* εκτείνεται τόσο ανάμεσα στα τμήματα Β όσο και ανάμεσα στο τμήμα Γ, και τα αντλήσουμε η λέξη που θα προκύψει δεν θα ανήκει στη γλώσσα μας και πάλι για τον λόγο ότι το τμήμα Α δεν θα έχει πια τη ζητούμενη σχέση με τα τμήματα Β και Γ.

Αυτό μας οδηγεί σε αντίφαση και επομένως η υπόθεσή μας ότι η γλώσσα $Λ_2$ είναι ασυμφραστική ήταν εσφαλμένη.

Συμπέρασμα: Η $Λ_2$ είναι μη ασυμφραστική.

(γ) $\left\{\boldsymbol{a^{4n^2+9}} \middle| \boldsymbol{n \geq 0}\right\}$

<u>Λύση</u>

Υποθέτουμε για να φτάσουμε σε αντίφαση ότι η γλώσσα, την οποία θα αποκαλούμε $Λ_3$, είναι ασυμφραστική. Τότε, σύμφωνα με το Λήμμα της Άντλησης, υπάρχει *p*, το μήκος άντλησης της γλώσσας, τέτοιο ώστε κάθε λέξη της γλώσσας με μήκος μεγαλύτερο από *p* να ικανοποιεί την ιδιότητα που περιγράφεται στο λήμμα.

Ας επιλέξουμε τη λέξη $w = a^{4p^2+9}$.

Τότε, σύμφωνα με το λήμμα, *w* = *uvxyz* έτσι ώστε η υπολέξη *vxy* περιέχει το πολύ *p* σύμβολα ($|vxy| \leq p$), τουλάχιστον μία από τις *v* και *y* να είναι μη κενή ($|vy| > 0$) και οποιαδήποτε ταυτόχρονη επανάληψη/αφαίρεση των υπολέξεων *v* και *y* να διατηρεί την προκύπτουσα λέξη εντός της γλώσσας ($uv^ixy^iz \in Λ_3$, $i \geq 0$).

Έστω ότι $v = a^λ$, $y = a^μ$ και $λ+μ \leq p$. Από το λήμμα, πρέπει να ισχύει ότι $uv^2xy^2z \in Λ_3$. Έχουμε ότι $uv^2xy^2z = a^{4p^2+9+λ+μ}$.

Για να ανήκει η λέξη στη γλώσσα πρέπει $4p^2 + 9 + λ + μ = 4q^2 + 9$ για κάποιο ακέραιο q. Αλλά

$4p^2 + 9 + λ + μ > 4p^2 + 9$ και

$4p^2 + 9 + λ + μ < 4(p + 1)^2 + 9 = 4p^2 + 8p + 13$ για τον λόγο ότι $λ+μ \leq p$.

Αφού η ποσότητα $4p^2 + 9 + λ + μ$ βρίσκεται ανάμεσα στις δύο τιμές, και δεν ισούται με καμιά από αυτές, είναι αδύνατο να υπάρχει q τέτοιο ώστε $4p^2 + 9 + μ = 4q^2 + 9$. Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι $uv^2xy^2z \notin L_3$ και επομένως η υπόθεσή μας ότι η γλώσσα L_3 είναι ασυμφραστική ήταν εσφαλμένη.

Συμπέρασμα: Η $Λ_3$ είναι μη ασυμφραστική.

<u>Άσκηση 5</u>

(α) Έστω μια ασυμφραστική γλώσσα Α. Να αποφασίσετε κατά πόσο η γλώσσα ΑΑ είναι ασυμφραστική.

(β) Έστω μια ασυμφραστική γλώσσα Α. Να αποφασίσετε κατά πόσο η γλώσσα $\overline{A}$ είναι ασυμφραστική. (Γράφουμε $\overline{A}$ για το συμπλήρωμα της γλώσσας Α.)

Λύση

Θα πρέπει να δείξουμε ότι αν η Α είναι μια ασυμφραστική γλώσσα τότε η γλώσσα ΑΑ είναι επίσης ασυμφραστική. Για να το πετύχουμε θα κατασκευάσουμε γραμματική που αποδέχεται την καινούρια γλώσσα επεκτείνοντας τη γραμματική της γλώσσας που παράγει τη γλώσσα Α. *(Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να δουλέψουμε με αυτόματα στοίβας.)*

Έστω G = (V, Σ, R, S) η ασυμφραστική γραμματική που παράγει τη γλώσσα Α. Γραμματική που παράγει τη γλώσσα ΑΑ είναι η εξής:

G_{AA} = (V$\cup${X}, Σ, R$\cup${X $\rightarrow$ SS}, X)

όπου

X μια μεταβλητή, η οποία αποτελεί την αρχική μεταβλητή της καινούριας γραμματικής, και η οποία δεν ανήκει στο V, και όπου στο σύνολο κανόνων της γλώσσας έχουμε προσθέσει τον κανόνα

X $\rightarrow$ SS

Ο κανόνας αυτός μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε λέξεις που αποτελούν τη συναρμογή λέξεων της γλώσσας Α, ξεκινώντας από την αρχική μεταβλητή S.

Μπορούμε να αποδείξουμε ότι η γραμματική G_{AA} παράγει τη γλώσσα ΑΑ. Συγκεκριμένα, μπορούμε να δείξουμε ότι $w \in L(G_{AA})$ αν και μόνο αν $w \in AA$.

(β) Η κλάση των ασυμφραστικών γλωσσών *δεν* είναι κλειστή ως προς την πράξη του συμπληρώματος. Κατάλληλο αντιπαράδειγμα είναι το πιο κάτω.

Θεωρήστε τις γλώσσες

$$A_1 = \{ a^k b^m c^n \mid k = m \} \text{ και } A_2 = \{ a^k b^m c^n \mid m = n \}$$

οι οποίες είναι ασυμφραστικές. Η κλάση των ασυμφραστικών γλωσσών είναι κλειστή ως προς την πράξη της ένωσης. Ας υποθέσουμε για να φτάσουμε σε αντίφαση ότι η κλάση των ασυμφραστικών γλωσσών είναι επίσης κλειστή ως προς την πράξη του συμπληρώματος. Τότε η γλώσσα

$$\overline{\overline{A_1} \cup \overline{A_2}} = A_1 \cap A_2$$

θα πρέπει να είναι κι αυτή ασυμφραστική.

Εντούτοις, η γλώσσα $A_1 \cap A_2$ η οποία ορίζεται ως

$$A_1 \cap A_2 = \{ a^k b^m c^n \mid k=m \text{ και } m = n \}$$

δεν είναι ασυμφραστική γλώσσα, κάτι που μπορούμε να αποδείξουμε χρησιμοποιώντας το Λήμμα της Άντλησης για Ασυμφραστικές Γλώσσες. Αυτό μας οδηγεί σε αντίφαση και επομένως η κλάση των ασυμφραστικών γλωσσών *δεν* είναι κλειστή ως προς την πράξη του συμπληρώματος.

Άσκηση 6

(α) Θεωρήστε μια γραμματική η οποία περιέχει μόνο κανόνες της μορφής $A \rightarrow wB$ και $A \rightarrow w$, όπου A, B μεταβλητές και w μια λέξη αποτελούμενη αποκλειστικά από τερματικά σύμβολα.

Να αποφασίσετε κατά πόσο η γλώσσα της γραμματικής είναι ή όχι κανονική αποδεικνύοντας την απάντησή σας.

__Λύση__

Η γλώσσα της γραμματικής είναι πράγματι κανονική. Αυτό μπορούμε να το αποδείξουμε επιδεικνύοντας πεπερασμένο αυτόματο το οποίο αποδέχεται την ίδια γλώσσα με τη γραμματική.

Συγκεκριμένα, ας θεωρήσουμε μια ασυμφραστική γραμματική G = (V, Σ, R, S) όπου οι κανόνες R είναι της μορφής $A \rightarrow wB$ και $A \rightarrow w$, όπου A, B μεταβλητές και w μια λέξη αποτελούμενη αποκλειστικά από τερματικά σύμβολα.

Κατασκευάζουμε το ισοδύναμο αυτόματο ως $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ όπου

$Q = \{q_A \mid a \in V\} \cup \{q_{AB1}, \ldots q_{AB(n-1)} \mid A \rightarrow wB,\ w = w_1 \ldots w_n,\ n > 0\}$

$\cup \{q_{w1}, \ldots q_{AB(n-1)} \mid A \rightarrow w,\ w = w_1 \ldots w_n,\ n > 0\} \cup \{f\}$

$q_0 = q_S$

δ τέτοιο ώστε, για κάθε κανόνα $A \rightarrow wB$, $w = w_1 \ldots w_n$, $n > 0$,

$q_{AB1} \in \delta(q_A, w_1), \ldots, q_{AB(n-1)} \in \delta(q_{AB(n-2)}, w_{n-1}), \ldots, q_B \in \delta(q_{AB(n-1)}, w_n)$

και για κάθε κανόνα $A \rightarrow w$, $w = w_1 \ldots w_n$, $n > 0$,

$q_{AB1} \in \delta(q_A, w_1), \ldots, q_{AB(n-1)} \in \delta(q_{AB(n-2)}, w_{n-1}), \ldots, f \in \delta(q_{AB(n-1)}, w_n)$

$F = \{f\}$

Μπορούμε να αποδείξουμε ότι μια λέξη παράγεται από τη γραμματική G αν και μόνο αν την αποδέχεται το αυτόματο N.

(β) Θεωρήστε μια γραμματική η οποία περιέχει μόνο κανόνες της μορφής $A \rightarrow wB$, $A \rightarrow Bw$ και $A \rightarrow w$, όπου A, B μεταβλητές και w μια λέξη αποτελούμενη αποκλειστικά από τερματικά σύμβολα.

Να αποφασίσετε κατά πόσο η γλώσσα της γραμματικής είναι ή όχι κανονική αποδεικνύοντας την απάντησή σας.

__Λύση__

Η γλώσσα μιας τέτοιας γραμματικής δεν είναι κανονική. Αυτό αποδεικνύεται από το πιο κάτω αντιπαράδειγμα γραμματικής, όπου ενώ οι κανόνες ακολουθούν τις προτεινόμενες μορφές η γλώσσα που παράγεται από τη γραμματική δεν είναι κανονική.

$S \rightarrow aA$
$A \rightarrow Sb$
$S \rightarrow \varepsilon$

Η γλώσσα της γραμματικής είναι η $\{a^i b^i \mid i \geq 0\}$.