

Φροντιστήριο 10, 09/04/19 και 10/04/19

Άσκηση 1

Υποθέστε ότι η γλώσσα A μπορεί να αναχθεί στη γλώσσα B . Ποιες από τις πιο κάτω προτάσεις είναι αληθείς και ποιες όχι;

(α) Κάποιος διαγνώστης για τη γλώσσα A μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη διάγνωση της γλώσσας B .

(β) Αν η A είναι διαγνώσιμη τότε και η B είναι διαγνώσιμη.

(γ) Αν η A είναι μη διαγνώσιμη τότε και η B είναι μη διαγνώσιμη.

Άσκηση 2

Θεωρήστε το πρόβλημα της διάγνωσης κατά πόσο μια ΤΜ M αποδέχεται τη λέξη 0010.

(α) Να μορφοποιήσετε το πρόβλημα ως μια γλώσσα με το όνομα L_{0010} .

(β) Να αποδείξετε ότι η γλώσσα είναι μη διαγνώσιμη με αναγωγή από τη γλώσσα A_{TM} .

Άσκηση 3

Να αποδείξετε ότι η πιο κάτω γλώσσα δεν είναι διαγνώσιμη.

$KENH = \{ \langle M \rangle \mid \text{η } M \text{ είναι μια μηχανή Turing η οποία για κάθε είσοδο τερματίζει και, κατά τον τερματισμό της, έχει κενή ταινία} \}$

Σύνοψη: Αναγωγές, Μη Διαγνωσιμότητα

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αναγωγή είναι η μετατροπή κάποιου προβλήματος σε κάποιο άλλο η οποία γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε η λύση του δεύτερου προβλήματος να μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση του πρώτου.

Λέμε ότι το πρόβλημα A μπορεί να αναχθεί στο πρόβλημα B αν υπάρχει αναγωγή από το A στο B,

δηλαδή, αν μπορούμε να μετατρέψουμε το πρόβλημα A στο B έτσι ώστε επίλυση του B να επιλύει και το A.

Μεθόδος Αναγωγής για επίδειξη της μη επιλυσιμότητας/μη διαγνωσιμότητας

Έστω γλώσσα L_1 . Για να δείξουμε ότι η L_1 είναι μη διαγνώσιμη:

1. Εντοπίζουμε *μη διαγνώσιμη* γλώσσα L_2 τέτοια ώστε η L_2 να μπορεί να αναχθεί στη L_1 .
2. Επιδεικνύουμε την αναγωγή: αν υπάρχει διαγνώστης για τη L_1 τότε υπάρχει διαγνώστης για τη L_2 .
3. Αφού η L_2 είναι μη διαγνώσιμη καταλήγουμε σε αντίφαση.
4. Επομένως, και η L_1 είναι μη διαγνώσιμη

Θεώρημα: Το πρόβλημα ΑΠΟΔΟΧΗ_{TM} το οποίο ορίζεται πιο κάτω είναι μη επιλύσιμο (Εναλλακτική διατύπωση: Η γλώσσα ΑΠΟΔΟΧΗ_{TM} η οποία ορίζεται πιο κάτω είναι μη διαγνώσιμη).

$ΑΠΟΔΟΧΗ_{TM} = \{ \langle M \rangle \mid \text{η } M \text{ είναι μια TM η οποία αποδέχεται το } \varepsilon \}$

Απόδειξη:

Υποθέτουμε ότι η γλώσσα ΑΠΟΔΟΧΗ_{TM} είναι διαγνώσιμη και η TM R είναι σε θέση να τη διαγνώσει. Τότε:

$S = \text{'Με είσοδο } \langle M, w \rangle \text{ όπου } M \text{ μια TM και } w \text{ μια λέξη}$

Κατασκεύασε τη TM M' :

$M' = \text{Με είσοδο } z,$
Τρέξε τη M με είσοδο w

Τρέξε την R με είσοδο $\langle M' \rangle$ και απάντησε με το αποτέλεσμα της.'

Τότε η S αποδέχεται το $\langle M, w \rangle$ αν και μόνο αν η M αποδέχεται το ε .

Επομένως η S διαγιγνώσκει τη γλώσσα A_{TM} . Αντίφαση!