Σειρά Προβλημάτων 3 – Λύσεις

Άσκηση 1

Να δώσετε ασυμφραστικές γραμματικές που να παράγουν τις πιο κάτω γλώσσες:

(α) { $(10)^m1^n$ | $m \geq n \geq 0$ }

(β) {$a^{3i}b^jc^k$ | $i, j, k \geq 0$ και $i = j + k$}

(γ) Το σύνολο όλων των λέξεων επί του αλφάβητου { (, b,) } στις οποίες (i) οι παρενθέσεις βρίσκονται ορθά τοποθετημένες (ισοζυγισμένες), (ii) το σύμβολο b μπορεί να εμφανίζεται οπουδήποτε μέσα στις λέξεις και για οποιονδήποτε αριθμό φορών, και (iii) δεν υπάρχουν τρία συνεχόμενα σύμβολα). Για παράδειγμα, οι λέξεις ε, ((()()), bbb() και (b)bb((b)bb) ανήκουν στη γλώσσα, ενώ οι λέξεις (bb() και (b(b(b))) δεν ανήκουν στη γλώσσα.

Λύση

(α) Μια γραμματική για τη γλώσσα έχει ως εξής:

$S \rightarrow 10S1 \mid T$

$T \rightarrow 10T \mid \varepsilon$

Η μεταβλητή S τοποθετεί το ζευγάρι ‘10’ στην αρχή και το σύμβολο ‘1’ στο τέλος της λέξης για μηδέν ή περισσότερες φορές και προσδιορίζει ότι στη συνέχεια η κατασκευή λέξεων θα ακολουθήσει τη μεταβλητή T. Η μεταβλητή T δίνει δύο επιλογές: είτε την εισαγωγή και άλλων ‘10’ στην αρχή της λέξης ή τον τερματισμό.

(β) Μια γραμματική για τη γλώσσα έχει ως εξής:

$S \rightarrow aaaSc \mid T$

$T \rightarrow aaaTb \mid \varepsilon$

Η μεταβλητή S τοποθετεί μια τριάδα από a στην αρχή και ένα c στο τέλος για μηδέν ή περισσότερες φορές και στη συνέχεια συνεχίζει τοποθετώντας μία τριάδα από a και ένα b για μηδέν ή περισσότερες φορές προτού τερματίσει την κατασκευή της λέξης. Με αυτό τον τρόπο διασφαλίζεται τόσο η σειρά των συμβόλων (στο τέλος τα c και στο μέσο τα b) όπως επίσης και το ότι το πλήθος των a είναι τριπλάσιο από το πλήθος των b και c μαζί.

(γ) Μια γραμματική για τη γλώσσα έχει ως εξής:

$S_0 \rightarrow \varepsilon \mid bS_0 \mid S_0S_0 \mid (S_1)$

$S_1 \rightarrow \varepsilon \mid bS_1 \mid S_0S_1 \mid (S_2)$

$S_2 \rightarrow \varepsilon \mid bS_2 \mid S_0S_2$

Οι μεταβλητές S_0, S_1 και S_2 συλλαμβάνουν τις περιπτώσεις όπου η λέξη που σχηματίστηκε μέχρι στιγμής τελειώνει σε μηδέν μέχρι και δύο σύμβολα ‘)’. Σε κάθε περίπτωση είναι επιτρεπτή η συνέχιση της κατασκευής λέξης με τοποθέτηση του συμβόλου b και ο τερματισμός (περίπτωση λέξης ε). Επίσης λέξεις μπορούν να φτιαχτούν ως ακολουθίες λέξεων με ορθά τοποθετημένες παρενθέσεις όπου το αριστερό σκέλος μπορεί να τελειώνει σε μέχρι 2 σύμβολα ‘)’ και το δεξί σε 0 ή ½ σύμβολα ‘)’ ανάλογα με την περίπτωση. Τέλος η λέξη μπορεί να κτιστεί με τοποθέτηση ζεύγους παρενθέσεων ως (S_i), όπου το i εξαρτάται και πάλι από την περίπτωση και “θυμάται” πόσες δεξιές παρενθέσεις υπάρχουν στο τέλος της λέξης.

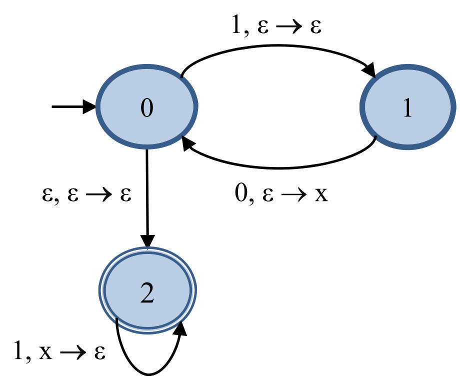
Άσκηση 2

Να κατασκευάσετε αυτόματα στοίβας για τις γλώσσες της Άσκησης 1. ***(Να κτίσετε τα αυτόματα κατευθείαν και όχι μέσω μετατροπής των ασυμφραστικών γραμματικών από την Άσκηση 1 σε αυτόματα.)***

(α) $\{ (10)^m 1^n \mid m \geq n \geq 0 \}$

Λύση

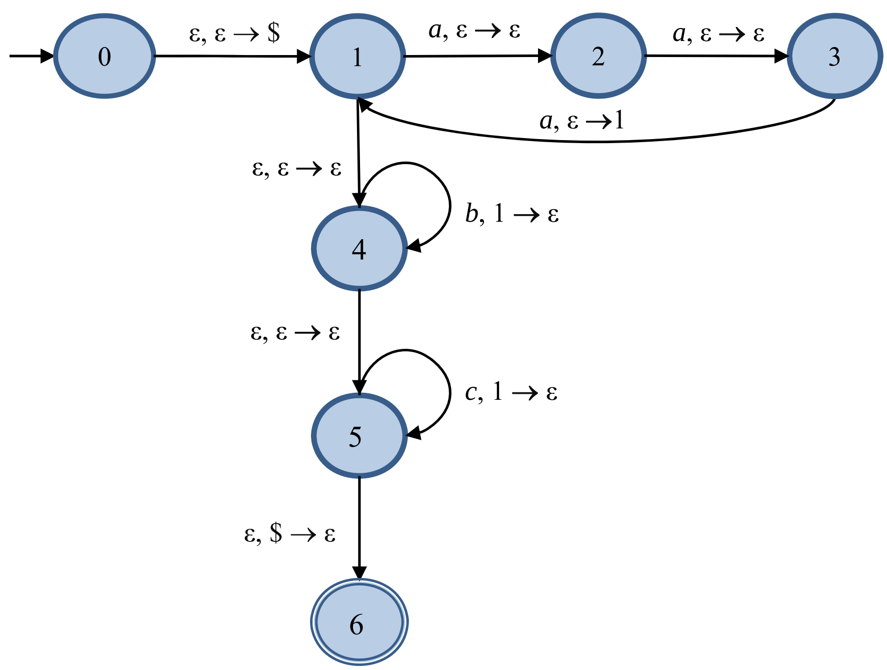
Ακολουθεί το ζητούμενο αυτόματο.



Περιγραφή: Το αυτόματο διαβάζει ακολουθίες ‘01’ και για κάθε μια από αυτές τοποθετεί ένα ‘x’ στη στοίβα. Ανά πάσα στιγμή, μη ντετερμινιστικά, από την κατάσταση 0 μπορεί να προχωρήσει στην κατάσταση 2 από όπου μπορεί να διαβάζει το σύμβολο ‘1’ εφόσον υπάρχουν ‘x’ στη στοίβα. Θα τερματίσει και θα αποδεχθεί τη λέξη αν η ανάγνωσή της ολοκληρωθεί προτού να αδειάσει η στοίβα.

(β) $\{a^{3i}b^jc^k \mid i, j, k \geq 0 \text{ και } i = j + k\}$

Λύση

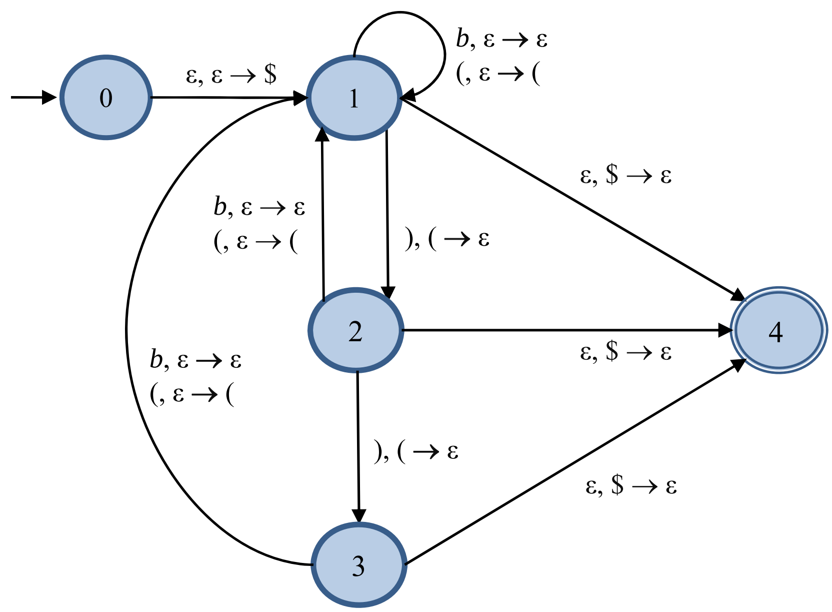


Περιγραφή: Το αυτόματο τοποθετεί το σύμβολο '\$' στον πάτο της στοίβας και ξεκινά να διαβάζει *'a'* αν υπάρχουν. Για κάθε τριάδα από *'a'* τοποθετεί ένα '1' στη στοίβα. Στη συνέχεια προχωρεί στην κατάσταση 4 όπου διαβάζει *'b'*, αν υπάρχουν, και για κάθε ένα από αυτά αφαιρεί ένα '1' από τη στοίβα. Με τον ίδιο τρόπο επεξεργάζεται τα *'c'* που ακολουθούν. Αν η στοίβα αδειάσει και ολοκληρωθεί η ανάγνωση της λέξης εισόδου, το αυτόματο αποδέχεται τη λέξη.

Σημείωση: οι ε-μεταβάσεις ανάμεσα στα διαφορετικά σκέλη της γλώσσας επιτρέπουν σε οποιοδήποτε από αυτά να είναι κενό.

(γ) Το σύνολο όλων των λέξεων επί του αλφάβητου { (, b,) } στις οποίες (i) οι παρενθέσεις βρίσκονται ορθά τοποθετημένες (ισοζυγισμένες), (ii) το σύμβολο b μπορεί να εμφανίζεται οπουδήποτε μέσα στις λέξεις και για οποιονδήποτε αριθμό φορών, και (iii) δεν υπάρχουν τρία συνεχόμενα σύμβολα). Για παράδειγμα, οι λέξεις ε, ((()()), bbb() και (b)bb((b)bb) ανήκουν στη γλώσσα, ενώ οι λέξεις (bb() και (b(b(b))) δεν ανήκουν στη γλώσσα.

<u>Λύση</u>



Περιγραφή: Το αυτόματο ξεκινά τη λειτουργία του τοποθετώντας το '\$' στη στοίβα. Στη συνέχεια διαβάζει επόμενα 'b'και '(' τοποθετώντας κάθε '(' στη στοίβα έτσι ώστε να διασφαλίσει την ορθή τοποθέτησή των παρενθέσεων. Αλλαγή κατάστασης υλοποιείται για κάθε ')' όπου, αφού δεν επιτρέπεται η τοποθέτηση περισσότερων των τριών συμβόλων ')', κάθε συνεχόμενο σύμβολο ')' οδηγεί σε αλλαγή κατάστασης. Από αυτές τις καταστάσεις, αν ακολουθήσει 'b' ή '(', η επεξεργασία επιστρέφει στην κατάσταση 1. Τέλος από τις καταστάσεις 1-4, αν στην κορυφή της στοίβας βρίσκεται το '\$', το αυτόματο προχωρεί στην κατάσταση αποδοχής.

<u>Άσκηση 3</u>

Θεωρήστε τη γραμματική G = (V, S, P, φ), όπου V = {φ, pred}, S = { $\neg$, $\vee$, (,), $\forall$x, K, M } και R οι πιο κάτω κανόνες.

$$\varphi \rightarrow \text{pred} \mid \neg\varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid (\varphi) \mid \forall x\, \varphi$$

$$\text{pred} \rightarrow K \mid M$$

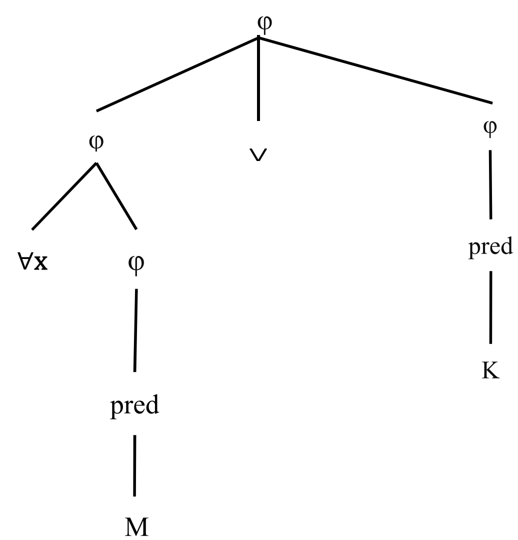
(α) Να κατασκευάσετε παραγωγές και τα αντίστοιχα συντακτικά δέντρα για τις λέξεις:

(i) $\forall x\ M \vee K$

(ii) $\forall \mathbf{x}\ (M \vee \neg K\ ) \vee \neg\forall \mathbf{x}\ M$

<u>Λύση</u>

(i) Συντακτικό Δέντρο:



Παραγωγή:

$$
\begin{aligned}
\varphi &\Rightarrow \varphi \vee \varphi \\
&\Rightarrow \forall x\ \varphi \vee \varphi \\
&\Rightarrow \forall x\ \text{pred} \vee \varphi \\
&\Rightarrow \forall x\ M \vee \varphi \\
&\Rightarrow \forall x\ M \vee \text{pred} \\
&\Rightarrow \forall x\ M \vee K
\end{aligned}
$$

(ii) Παραγωγή:

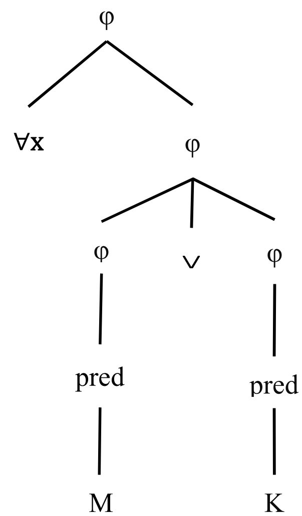
$$
\begin{aligned}
\varphi &\Rightarrow \varphi \vee \varphi \\
&\Rightarrow \forall x\ \varphi \vee \varphi \\
&\Rightarrow \forall x\ (\varphi) \vee \varphi \\
&\Rightarrow \forall \mathbf{x}\ (\varphi \vee \varphi\ ) \vee \varphi \\
&\Rightarrow \forall \mathbf{x}\ (\text{pred} \vee \varphi\ ) \vee \varphi \\
&\Rightarrow \forall \mathbf{x}\ (M \vee \varphi\ ) \vee \varphi \\
&\Rightarrow \forall \mathbf{x}\ (M \vee \neg\varphi\ ) \vee \varphi \\
&\Rightarrow \forall \mathbf{x}\ (M \vee \neg\text{pred}\ ) \vee \varphi \\
&\Rightarrow \forall \mathbf{x}\ (M \vee \neg K\ ) \vee \varphi \\
&\Rightarrow \forall \mathbf{x}\ (M \vee \neg K\ ) \vee \neg\varphi \\
&\Rightarrow \forall \mathbf{x}\ (M \vee \neg K\ ) \vee \neg\forall \mathbf{x}\ \varphi \\
&\Rightarrow \forall \mathbf{x}\ (M \vee \neg K\ ) \vee \neg\forall \mathbf{x}\ \text{pred} \\
&\Rightarrow \forall \mathbf{x}\ (M \vee \neg K\ ) \vee \neg\forall \mathbf{x}\ M
\end{aligned}
$$

Το σχετικό συντακτικό δένδρο παραλείπεται.

(β) Να εντοπίσετε “πρόταση” φ που να παράγεται από τη γραμματική G πολύτροπα παρουσιάζοντας δύο διαφορετικά συντακτικά δένδρα παραγωγής της λέξης.

<u>Λύση</u>

Πρόταση που παράγεται πολύτροπα από το γραμματική είναι η πρόταση από το σκέλος (α)(i). Εκτός από το συντακτικό δένδρο που παρουσιάζεται πιο πάνω, η πρόταση παράγεται και ως εξής:



(γ) Να προτείνετε μια καινούρια γραμματική που να παράγει την ίδια γλώσσα με τη G αλλά να είναι μονότροπη. Εξηγήστε σύντομα την απάντησή σας και τη σειρά προτεραιότητας που επιβάλει η γραμματική σας στους τελεστές ¬, ∨, ∀x.

<u>Λύση</u>

$$\varphi \rightarrow \varphi \vee \varphi \mid \chi$$

$$\chi \rightarrow \neg \chi \mid \psi$$

$$\psi \rightarrow \forall x\, \psi \mid \omega$$

$$\omega \rightarrow (\omega) \mid \text{pred}$$

$$\text{pred} \rightarrow K \mid M$$

Η πιο πάνω γραμματική επιβάλει τη σειρά προτεραιότητας, από μικρότερη σε μεγαλύτερη: **∨, ¬, ∀x**. Με αυτό τον τρόπο, για παράδειγμα, επιτρέπει για τη λέξη $\forall x\ M \vee K$ την παραγωγή από το σκέλος (α)(i) αλλά όχι την παραγωγή από το σκέλος (β).

<u>Άσκηση 4</u>

Να αποφασίσετε κατά πόσο οι πιο κάτω γλώσσες είναι ασυμφραστικές αιτιολογώντας με ακρίβεια τις απαντήσεις σας.

(α) $\Lambda_1 = \{a^n b^m c^k d^r \mid 2n = 3k \text{ και } 5m = 7r\}$

Υποθέτουμε για να φτάσουμε σε αντίφαση ότι η Λ_1 είναι ασυμφραστική. Τότε, σύμφωνα με το Λήμμα της Άντλησης, υπάρχει *p*, το μήκος άντλησης της γλώσσας, τέτοιο ώστε κάθε

λέξη της γλώσσας με μήκος μεγαλύτερο από *p* να ικανοποιεί την ιδιότητα που περιγράφεται στο λήμμα.
Ας επιλέξουμε τη λέξη *w* = $a^{3p}b^{7p}c^{2p}d^{5p}$ και ας ονομάσουμε τα τμήματα της λέξης ως Α, Β, Γ, Δ όπου Α= a^{3p}, Β=b^{7p}, Γ = c^{2p}, Δ = d^{5p}, w = ΑΒΓΔ

Τότε, σύμφωνα με το λήμμα, *w* = *uvxyz* έτσι ώστε η υπολέξη *vxy* περιέχει το πολύ *p* σύμβολα ($|vxy| \le p$), τουλάχιστον μία από τις *v* και *y* να είναι μη κενή ($|vy|> 0$) και οποιαδήποτε ταυτόχρονη επανάληψη ή αφαίρεση των υπολέξεων *v* και *y* να διατηρεί την προκύπτουσα λέξη εντός της γλώσσας ($uv^ixy^iz \in Λ_1$, $i \ge 0$).

Αφού $|v\mathrm{xy}| \le p$, τότε η λέξη αυτή δεν μπορεί να εκτείνεται σε περισσότερα από δύο τμήματα της λέξης. Διακρίνουμε τις πιο κάτω περιπτώσεις.

- Αν τα *v* και y εκτείνονται στο τμήμα Α τότε αν αφαιρέσουμε τα τμήματα v και y, η λέξη που θα προκύψει θα έχει τη μορφή $a^{3p-λ-μ}\ b^{7p}c^{2p}d^{5p}$, όπου v = $0^λ$ και y = $0^μ$. Προφανώς η λέξη δεν ανήκει στη γλώσσα αφού το πλήθος των a στο πρώτο σκέλος της λέξης δεν ικανοποιεί τη ζητούμενη σχέση με το πλήθος των c.
  Παρόμοια μπορούμε να χειριστούμε τις περιπτώσεις όπου τα v και y εκτείνονται σε ένα μόνο από τα τμήματα Β, Γ και Δ.
- Αν τα v και y εκτείνονται στα τμήματα Α και Β τότε, αν αφαιρέσουμε τα τμήματα v και y η λέξη uv^0xy^0z θα ικανοποιεί ένα από τα πιο κάτω:
  - Αν v = $a^λ$ και y = $b^μ$ τότε η λέξη θα έχει τη μορφή μορφή $a^{3p-λ}\ b^{7p-μ}c^{2p}d^{5p}$. Προφανώς η λέξη δεν ανήκει στη γλώσσα αφού τα πλήθη των a και των b δεν ικανοποιούν τη ζητούμενη σχέση με τα πλήθη των c και d.
  - Αν v = $a^λb^μ$ και y = $b^ν$ τότε η λέξη θα έχει τη μορφή μορφή $a^{3p-λ}\ b^{7p-μ-ν}c^{2p}d^{5p}$. Προφανώς η λέξη δεν ανήκει στη γλώσσα αφού και πάλι τα πλήθη των a και των b δεν ικανοποιούν τη ζητούμενη σχέση με τα πλήθη των c και d.
  - Αν v = $a^λ$ και y = $a^μb^ν$ τότε η λέξη θα έχει τη μορφή μορφή $a^{3p-λ-μ}\ b^{7p-ν}c^{2p}d^{5p}$. Προφανώς η λέξη δεν ανήκει στη γλώσσα αφού και πάλι τα πλήθη των a και των b δεν ικανοποιούν τη ζητούμενη σχέση με τα πλήθη των c και d.

  Παρόμοια μπορούμε να χειριστούμε τις περιπτώσεις όπου τα v και y εκτείνονται στα τμήματα Β και Γ, ή Γ και Δ.

Αυτό μας οδηγεί σε αντίφαση και επομένως η υπόθεσή μας ότι η γλώσσα $Λ_1$ είναι ασυμφραστική ήταν εσφαλμένη.

Συμπέρασμα: Η $Λ_1$ είναι μη ασυμφραστική.

<u>Λύση</u>

(β) $Λ_2$ = { a^n | το n είναι δύναμη του 2}

<u>Λύση</u>

Υποθέτουμε για να φτάσουμε σε αντίφαση ότι η $Λ_2$ είναι ασυμφραστική. Τότε, σύμφωνα με το Λήμμα της Άντλησης, υπάρχει *p*, το μήκος άντλησης της γλώσσας, τέτοιο ώστε κάθε λέξη της γλώσσας με μήκος μεγαλύτερο από *p* να ικανοποιεί την ιδιότητα που περιγράφεται στο λήμμα.

Ας επιλέξουμε τη λέξη *w* = a^{2^p}.

Τότε, σύμφωνα με το λήμμα, *w* = *uvxyz* έτσι ώστε η υπολέξη *vxy* περιέχει το πολύ *p* σύμβολα ($|vxy| \le p$), τουλάχιστον μία από τις *v* και *y* να είναι μη κενή ($|vy|> 0$) και οποιαδήποτε ταυτόχρονη επανάληψη/αφαίρεση των υπολέξεων *v* και *y* να διατηρεί την προκύπτουσα λέξη εντός της γλώσσας ($uv^ixy^iz \in Λ_2$, $i \geq 0$).

Έστω ότι $v = a^λ$, $y = a^μ$ και $λ+μ \leq p$. Επίσης, από το λήμμα, πρέπει να ισχύει ότι $uv^2xy^2z \in Λ_2$. Έχουμε ότι $uv^2xy^2z = a^{2^p+λ+μ}$.

Για να ανήκει η λέξη στη γλώσσα πρέπει $2^p + λ + μ = 2^q$ για κάποιο ακέραιο q. Αλλά

$2^p + λ + μ > 2^p$ και

$2^p + λ + μ \leq 2^p + p < 2^p + 2^p = 2^{p+1}$.

Αφού η ποσότητα $2^p + λ + μ$ βρίσκεται ανάμεσα στις δύο τιμές, και δεν ισούται με καμιά από αυτές, είναι αδύνατο να υπάρχει q τέτοιο ώστε $2^p + λ + μ = 2^q$. Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι $xy^2z \notin Λ_2$ και επομένως η υπόθεσή μας ότι η γλώσσα $Λ_2$ είναι ασυμφραστική ήταν εσφαλμένη.

Συμπέρασμα: Η $Λ_2$ είναι μη ασυμφραστική.

(γ) $Λ_3 = \{ Δ(n)\#Δ(n+1) \mid n \geq 1 \}$

<u>Λύση</u>

Υποθέτουμε για να φτάσουμε σε αντίφαση ότι η $Λ_3$ είναι ασυμφραστική. Τότε, σύμφωνα με το Λήμμα της Άντλησης, υπάρχει *p*, το μήκος άντλησης της γλώσσας, τέτοιο ώστε κάθε λέξη της γλώσσας με μήκος μεγαλύτερο από *p* να ικανοποιεί την ιδιότητα που περιγράφεται στο λήμμα.
Ας επιλέξουμε τη λέξη $w = 1^p0^p\#1^p0^{p-1}1$ και ας ονομάσουμε τα τμήματα της λέξης ως Α, Β, Γ, Δ όπου $Α= 1^p$, $Β=0^p$, $Γ = 1^p$, $Δ = 0^{p-1}1$, w = ΑΒ#ΓΔ

Τότε, σύμφωνα με το λήμμα, *w* = *uvxyz* έτσι ώστε η υπολέξη *vxy* περιέχει το πολύ *p* σύμβολα ($|vxy| \leq p$), τουλάχιστον μία από τις *v* και *y* να είναι μη κενή ($|vy|> 0$) και οποιαδήποτε ταυτόχρονη επανάληψη ή αφαίρεση των υπολέξεων *v* και *y* να διατηρεί την προκύπτουσα λέξη εντός της γλώσσας ($uv^ixy^iz \in Λ_3$, $i \geq 0$).

Αφού $|vxy| \leq p$, τότε η λέξη αυτή δεν μπορεί να εκτείνεται σε περισσότερα από δύο τμήματα της λέξης. Διακρίνουμε τις πιο κάτω περιπτώσεις.

- Ένα από τα v και y περιέχουν το #. Τότε, η λέξη uv^0xy^0z δεν θα περιέχει το # και επομένως η λέξη δεν θα ανήκει στη γλώσσα.
- Αν τα *v* και y εκτείνονται στο τμήμα Α τότε αν αφαιρέσουμε τα τμήματα v και y, η λέξη που θα προκύψει θα έχει τη μορφή $1^{p-λ-μ}0^p\#1^p0^{p-1}1$, όπου $v = 1^λ$ και $y = 1^μ$. Προφανώς η λέξη δεν ανήκει στη γλώσσα αφού η λέξη $1^p0^{p-1}1$ δεν αποτελεί πια την αναπαράσταση της $1^{p-λ-μ}0^p$+1.
  Παρόμοια μπορούμε να χειριστούμε τις περιπτώσεις όπου τα v και y εκτείνονται σε ένα μόνο από τα τμήματα Β, Γ και Δ.
- Αν τα v και y εκτείνονται στα τμήματα Α και Β τότε, αν αφαιρέσουμε τα τμήματα v και y η λέξη uv^0xy^0z θα ικανοποιεί ένα από τα πιο κάτω:
  - Αν $v = 1^λ$ και $y = 0^μ$ τότε η λέξη θα έχει τη μορφή μορφή $1^{p-λ}0^{p-μ}\#1^p0^{p-1}1$. Προφανώς η λέξη δεν ανήκει στη γλώσσα αφού η λέξη $1^p0^{p-1}1$ δεν αποτελεί πια την αναπαράσταση της $1^{p-λ}0^{p-μ}$ +1.
  - Αν $v = 1^λ0^μ$ και $y = 0^ν$ τότε η λέξη θα έχει τη μορφή μορφή $1^{p-λ}0^{p-μ-ν}\#1^p0^{p-1}1$. Προφανώς η λέξη δεν ανήκει στη γλώσσα αφού η λέξη $1^p0^{p-1}1$ δεν αποτελεί πια την αναπαράσταση της $1^{p-λ}0^{p-μ-ν}$ +1.

- Αν v = 1^{λ} και y = $1^{\mu}0^{\nu}$ τότε η λέξη θα έχει τη μορφή μορφή $1^{p-\lambda-\mu}0^{p-\nu}\#1^{p}0^{p-1}1$. Προφανώς η λέξη δεν ανήκει στη γλώσσα αφού η λέξη $1^{p}0^{p-1}1$ δεν αποτελεί πια την αναπαράσταση της $1^{p-\lambda-\mu}0^{p-\nu}$ +1.

Σε κάθε περίπτωση η προκύπτουσα λέξη δεν ανήκει στη γλώσσα. Παρόμοια μπορούμε να χειριστούμε τις περιπτώσεις όπου τα v και y εκτείνονται στα τμήματα Β και Γ, ή Γ και Δ.

Αυτό μας οδηγεί σε αντίφαση και επομένως η υπόθεσή μας ότι η γλώσσα $Λ_3$ είναι ασυμφραστική ήταν εσφαλμένη.

Συμπέρασμα: Η $Λ_3$ είναι μη ασυμφραστική.

(δ) $L_4 = \{ Δ(n)^{rev}\#Δ(n+1) \mid n \geq 0 \}$

<u>Λύση</u>

Η γλώσσα είναι ασυμφραστική. Ακολουθεί ασυμφραστική γραμματική που την παράγει.

S → 0R1 | 1T0 | 01
T → 1T0 | 0R1 | #1
R → 0R0 | 1R1 | #

<u>Άσκηση 5</u>

Έστω δύο λέξεις w_1 και w_2. Η λέξη w_1 ονομάζεται *τραύλισμα* της λέξης w_2 αν η w_1 επαναλαμβάνει κάθε σύμβολο της w_2 μηδέν ή περισσότερες φορές. Για παράδειγμα, οι λέξεις 110, 11000, 10 και 1000 αποτελούν τραυλίσματα της λέξης 10. Με βάση αυτή τη σχέση, δοθείσας μιας γλώσσας Λ ορίζουμε

***Τραύλισμα*(Λ) = { w | η λέξη w αποτελεί τραύλισμα μιας λέξης u ∈ Λ}**

Με λόγια, η γλώσσα Τραύλισμα(Λ) περιέχει όλες τις λέξεις που αποτελούν τραυλίσματα των λέξεων της γλώσσας Λ.

Να αποδείξετε ότι η κλάση των ασυμφραστικών γλωσσών είναι κλειστή ως προς την πράξη *Τραύλισμα*.

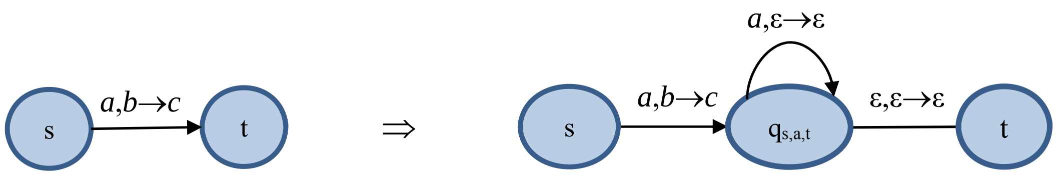
<u>Λύση</u>

Έστω ασυμφραστική γλώσσα Λ. Από την ασυμφραστικότητα της γλώσσας, υπάρχει αυτόματο στοίβας που την αναγνωρίζει. Έστω M = (Q, Σ, Γ, δ, q, F) ένα τέτοιο PDA. Θα δείξουμε ότι υπάρχει αυτόματο στοίβας που αναγνωρίζει τη γλώσσα *Τραύλισμα*(Λ). Το αυτόματο αυτό είναι το αυτόματο P = ($Q \cup Q'$, Σ, Γ, δ,΄ q, F), όπου

$Q' = \{ q_{s,a,t} \mid s, t \in Q, (t,c) \in \delta(s,a,b)\}$

$$\delta'(s,a,b) = \begin{cases} \{(q_{s,a,t},c) \mid (t,c) \in \delta(s,a,b)\} & \alpha\nu\ s \in Q, a \neq \varepsilon \\ \{(q_{s,a,t},\varepsilon)\} & \alpha\nu\ s = q_{s,a,t}, b = \varepsilon \\ \{(t,\varepsilon)\} & \alpha\nu\ s = q_{s,a,t}, a = b = \varepsilon \\ \delta(s,a,b) & otherwise \end{cases}$$

Με λόγια, το αυτόματο εισάγει μια καινούρια κατάσταση $q_{s,a,t}$ ανάμεσα σε οποιοδήποτε ζεύγος καταστάσεων s, t, όπου (t,c) ∈δ(s,a,b) η οποία επιτρέπει την ανάγνωση και επιπρόσθετων συμβόλων a. Αυτή η βασική δομή παρουσιάζεται στο πιο κάτω σχήμα.



Μπορούμε να αποδείξουμε ότι το PDA P αποδέχεται μια λέξη w αν και μόνο αν $w \in$ *Τραύλισμα*(Λ):

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι $w \in$ L(P). Τότε η w μπορεί να γραφτεί στη μορφή $w = w_1w_2\ldots w_m$ όπου κάθε $w_i \in \Sigma_\varepsilon$, και υπάρχει ακολουθία καταστάσεων $r_0, r_1,\ldots, r_m \in Q \cup Q'$και ακολουθία λέξεων (στοίβες) $s_0, s_1,\ldots, s_m \in \Gamma^*$ που να ικανοποιούν τις συνθήκες:

- $r_0 = q_0$ και $s_0 = \varepsilon$
- Για κάθε $i = 0,\ldots,m-1$, $(r_{i+1}, \mathrm{b}) \in \delta(r_i, w_{i+1}, a)$, όπου $s_i = at$ και $s_{i+1}=bt$ για κάποια $a,b \in \Gamma_\varepsilon$ και $t \in \Gamma^*$, και
- $r_m \in F$

Τότε, από τον ορισμό του P, $w = (w_1)^*(w_2)^*\ldots(w_k)^*$

$r_0, r_1, \ldots, r_m = s_0, (q_1)^*, s_1, (q_2)^*, \ldots, (q_k)^*, s_k$

όπου $q_i = q_{s(i-1)\ wi,si}$

ενώ όλες οι στοίβες που αντιστοιχούν στις μεταβάσεις ανάμεσα στα $(q_i)^*$ δεν επιφέρουν αλλαγές στην κατάσταση της στοίβας.

Με βάση τα πιο πάνω, παρατηρούμε ότι στο αυτόματο M υπάρχει η ακολουθία καταστάσεων $s_0, s_1, \ldots, s_k$ στην οποία διαβάζεται η λέξη $w_1w_2\ldots w_k$ η οποία και ανήκει στη γλώσσα του αυτόματου M, δηλαδή την Λ. Αφού η w αποτελεί τραύλισμα της λέξης $w_1w_2\ldots w_k$, αυτό συνεπάγεται ότι κάθε λέξη στη γλώσσα του P αποτελεί τραύλισμα λέξης της γλώσσας Λ.

Η αντίθετη κατεύθυνση ακολουθεί όμοια επιχειρήματα.