
Θεωρία Υπολογισμού και Πολυπλοκότητα

Ασυμφραστικές Γλώσσες (2)

Στην ενότητα αυτή θα μελετηθούν τα εξής επιμέρους θέματα:

Αυτόματα Στοίβας (2.2)

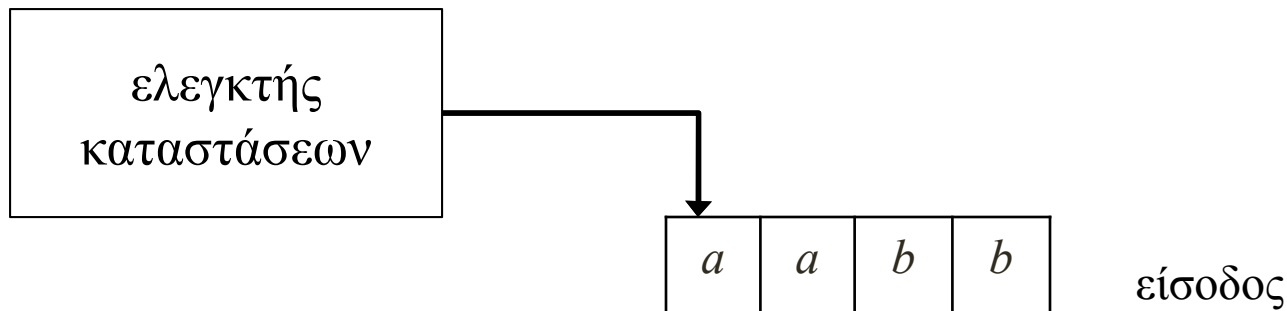
- *Τυπικός Ορισμός*
- *Παραδείγματα*
- *Ισοδυναμία με Ασυμφραστικές Γραμματικές*

Αυτόματα Στοίβας

- Αυτόματο Στοίβας (Pushdown automaton, PDA)
 - Μη Ντετερμινιστικό Πεπερασμένο Αυτόματο με επιπλέον «εξάρτημα» - ΣΤΟΙΒΑ
- Η στοίβα παρέχει επιπρόσθετη μνήμη - πέραν της πεπερασμένης μνήμης που προσφέρουν οι καταστάσεις του αυτόματου
 - Επιτρέπει στα αυτόματα να αναγνωρίζουν μη κανονικές γλώσσες
- Τα PDA είναι ισοδύναμα με τις ασυμφραστικές γραμματικές
 - Επιτρέπουν την αναγνώριση ασυμφραστικών γλωσσών.

Λειτουργία Πεπερασμένων Αυτομάτων

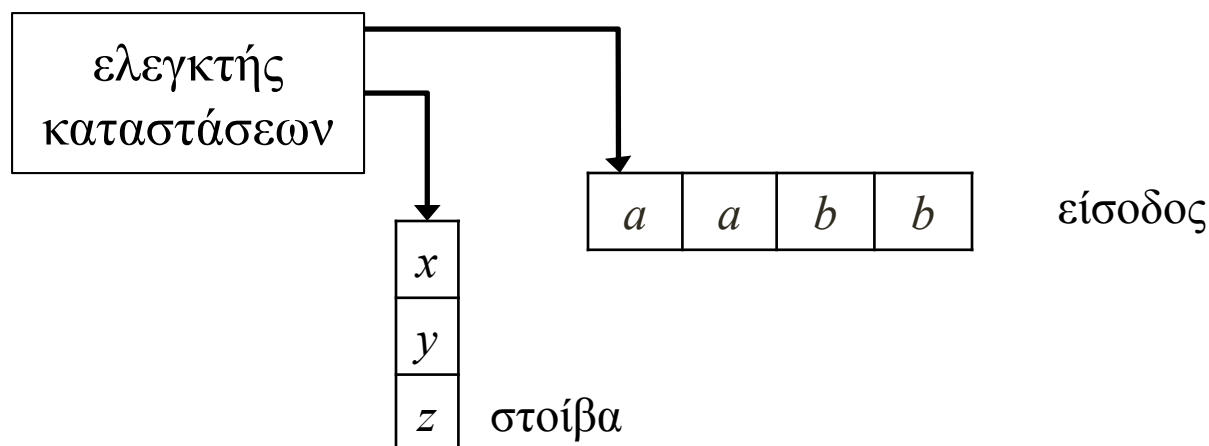
- Σχηματική αναπαράσταση πεπερασμένου αυτόματου
 - **Ελεγκτής**: Καταστάσεις και Μεταβάσεις Καταστάσεων
 - **Ταινία**: Λέξη Εισόδου
 - **Βέλος**: Κεφαλή Εισόδου



- Ο ελεγκτής διαβάζει το επόμενο σύμβολο και βάσει αυτού καθορίζει την επόμενη κατάσταση του αυτομάτου.

Λειτουργία Αυτομάτων Στοίβας

- Σχηματική Αναπαράσταση πεπερασμένου αυτόματου στοίβας
 - **Ελεγκτής**: Καταστάσεις και Μεταβάσεις Καταστάσεων
 - **Ταινία**: Λέξη Εισόδου
 - **Βέλος**: Κεφαλή Εισόδου
 - **Στοίβα**: Εγγραφή και διάβασμα συμβόλων



- Ο ελεγκτής διαβάζει (1) το επόμενο σύμβολο και (2) το στοιχείο στην κορυφή της στοίβας και, **βάσει αυτής της δυάδας**, αποφασίζει ποια θα είναι η επόμενη κατάσταση.

Χρήση Στοίβας

- Ένα αυτόματο στοίβας μπορεί
 - Να γράφει σύμβολα στη στοίβα
 - Να διαβάζει σύμβολα από την στοίβα αν δεν είναι κενή.
- Είδος αποθήκευσης **LIFO**: “last in first out”
- **Εγγραφή**: Το νέο σύμβολο τοποθετείται στην κορυφή και σπρώχνει τα υπόλοιπα σύμβολα προς τα κάτω.
 - απόθεση – push
- **Ανάγνωση**: Επιστρέφει το σύμβολο που βρίσκεται στην κορυφή και το αφαιρεί από τη στοίβα.
 - ανάληψη – pop
- Απεριόριστος αποθηκευτικός χώρος

Παράδειγμα

- Γλώσσα $L = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$
- Δεν μπορεί να αναγνωριστεί από κανένα πεπερασμένο αυτόματο
 - Λόγω πεπερασμένου αριθμού καταστάσεων
- Αναγνωρίζεται από αυτόματα στοίβας
 - Διαβάζουμε σύμβολα από την είσοδο
 - Αν το σύμβολο είναι 0 το αποθέτουμε στη στοίβα
 - Μόλις δούμε το πρώτο 1 βγάζουμε ένα 0 από τη στοίβα
 - Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο για κάθε 1 που διαβάζουμε
 - Αν όταν φτάσουμε στο τέλος της εισόδου η στοίβα είναι κενή τότε το αυτόματο αποδέχεται την λέξη.

Σημείωση

- Τα ντετερμινιστικά αυτόματα στοίβας *δεν είναι ισοδύναμα* με τα μη ντετερμινιστικά αυτόματα στοίβας
 - Τα μη ντετερμινιστικά αυτόματα στοίβας αναγνωρίζουν περισσότερες γλώσσες από τα ντετερμινιστικά
- Θα μελετήσουμε μόνο τα ΜΗ ΝΤΕΤΕΡΜΙΝΙΣΤΙΚΑ αυτόματα στοίβας

Αλφάβητα και Μεταβάσεις

- Δύο αλφάβητα

- $\Sigma_\varepsilon = \Sigma \cup \{\varepsilon\}$: αλφάβητο εισόδου

- $\Gamma_\varepsilon = \Gamma \cup \{\varepsilon\}$: αλφάβητο στοίβας

Η στοίβα μπορεί να χρησιμοποιεί διαφορετικά σύμβολα από αυτά της εισόδου.

- Συνάρτηση μεταβάσεων

- Για κάθε τριάδα

- (κατάσταση, σύμβολο εισόδου, σύμβολο κορυφής στοίβας)

- παράγεται ένα σύνολο

- $\{(κατάσταση\ 1, σύμβολο\ στοίβας\ 1), \dots, (κατάσταση\ k, σύμβολο\ στοίβας\ k)\}$

- Αν $\delta(q, a, b) = \{(q_1, b_1), \dots, (q_k, b_k)\}$, τότε το αυτόματο διαβάζοντας το σύμβολο a όντας στην κατάσταση q τη στιγμή που η στοίβα έχει στην κορυφή της το σύμβολο b , τότε το αυτόματο μπορεί να μεταβεί στην κατάσταση q_i γράφοντας στη στοίβα το σύμβολο b_i για κάθε $1 \leq i \leq k$.

- Τα σύμβολα στοίβας μπορούν να είναι και η κενή λέξη ε . Αυτό σημαίνει ότι η μηχανή δεν θα διαβάσει από τη στοίβα ή δεν θα γράψει σε αυτή.

PDA – Ορισμός

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αυτόματο στοίβας είναι μια εξάδα $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$, όπου

1. Q είναι ένα πεπερασμένο σύνολο, τα στοιχεία του οποίου ονομάζονται *καταστάσεις*,
2. Σ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο, που ονομάζεται *αλφάβητο*,
3. Γ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο, που ονομάζεται *αλφάβητο στοίβας*,
4. $\delta: Q \times \Sigma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon \rightarrow P(Q \times \Gamma_\varepsilon)$, είναι η *συνάρτηση μεταβάσεων*,
5. $q_0 \in Q$ είναι η *εναρκτήρια κατάσταση*,
6. $F \subseteq Q$ είναι το *σύνολο των καταστάσεων αποδοχής*.

Παρατήρηση: Κάθε NFA είναι και PDA.

Ορισμός του υπολογισμού

- Το αυτόματο στοίβας $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ *αποδέχεται* μια λέξη w αν αυτή μπορεί να γραφτεί στη μορφή $w = w_1 w_2 \dots w_m$ όπου κάθε $w_i \in \Sigma_\varepsilon$, και υπάρχει ακολουθία καταστάσεων $r_0, r_1, \dots, r_m \in Q$. και ακολουθία λέξεων $s_0, s_1, \dots, s_m \in \Gamma^*$ που να ικανοποιούν τις συνθήκες:
 - $r_0 = q_0$ και $s_0 = \varepsilon$
 - Για κάθε $i = 0, \dots, m - 1$, $(r_{i+1}, b) \in \delta(r_i, w_{i+1}, a)$ όπου $s_i = at$ και $s_{i+1} = bt$ για κάποια $a, b \in \Gamma_\varepsilon$ και $t \in \Gamma^*$, και
 - $r_m \in F$
- Το αυτόματο M *αναγνωρίζει* τη γλώσσα A αν:
$$A = \{w \mid \text{το } M \text{ αποδέχεται την } w\}$$

Περιγραφή Αυτομάτου Στοίβας (1)

- Πως παρουσιάζουμε ένα αυτόματο στοίβας;
- **Πίνακας Μεταβάσεων**
 - Για κάθε κατάσταση και κάθε σύμβολο της γλώσσας σημειώνουμε την εξέλιξη του αυτομάτου για κάθε δυνατό σύμβολο στην κορυφή της στοίβας.
 - Χωρίζουμε κάθε στήλη σε υποστήλες που αναφέρονται στα σύμβολα που δυνατόν να διαβάσουμε στην κορυφή της στοίβας.
 - Γράφοντας ϵ υπονοούμε ότι η μετάβαση γίνεται χωρίς ανάγνωση συμβόλου από τη στοίβα.
- Παράδειγμα: Αν $Q = \{q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{0,1\}$, $\Gamma = \{0,\$, \epsilon\}$, ο πίνακας μεταβάσεων θα έχει την πιο κάτω μορφή:

Είσοδος	0			1			ϵ		
	0	\$	ϵ	0	\$	ϵ	0	\$	ϵ
q_1									
q_2									

Περιγραφή Αυτομάτου Στοίβας (2)

- Σχεδιάγραμμα Καταστάσεων

- Στις ακμές του αυτομάτου τοποθετούμε πλειάδες της μορφής $a, b \rightarrow c$ όπου

a : το σύμβολο στην είσοδο

- Αν $a = \epsilon$ το αυτόματο εκτελεί τη μετάβαση χωρίς να διαβάσει σύμβολο από την είσοδο

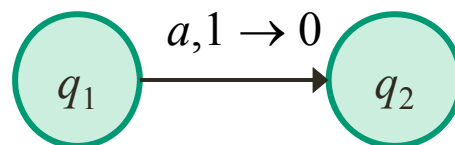
b : το σύμβολο στην κορυφή της στοίβας

- Αν $b = \epsilon$ το αυτόματο εκτελεί τη μετάβαση χωρίς να διαβάσει σύμβολο από τη στοίβα

c : σύμβολο με το οποίο αντικαθιστούμε το b στη στοίβα

- Αν $c = \epsilon$ το αυτόματο εκτελεί την μετάβαση χωρίς να αποθέσει σύμβολο στη στοίβα

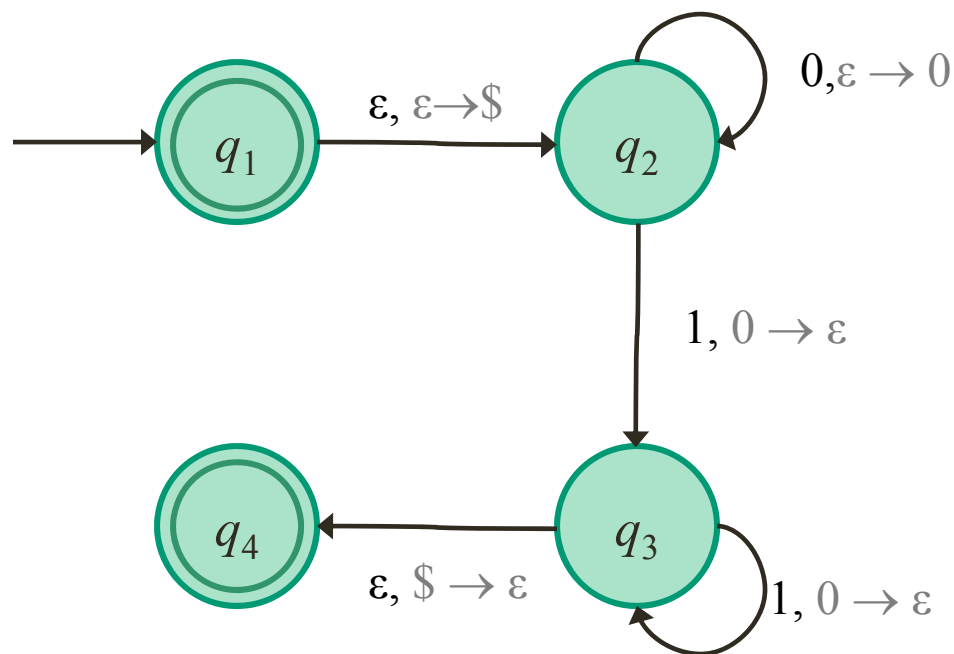
- Παράδειγμα:



Αν στην κατάσταση q_1 διαβάσουμε το σύμβολο a και στην κορυφή της στοίβας βρίσκεται το 1 τότε το αυτόματο θα μεταβεί στην κατάσταση q_2 και το 1 θα αντικατασταθεί από 0 .

Παράδειγμα 1

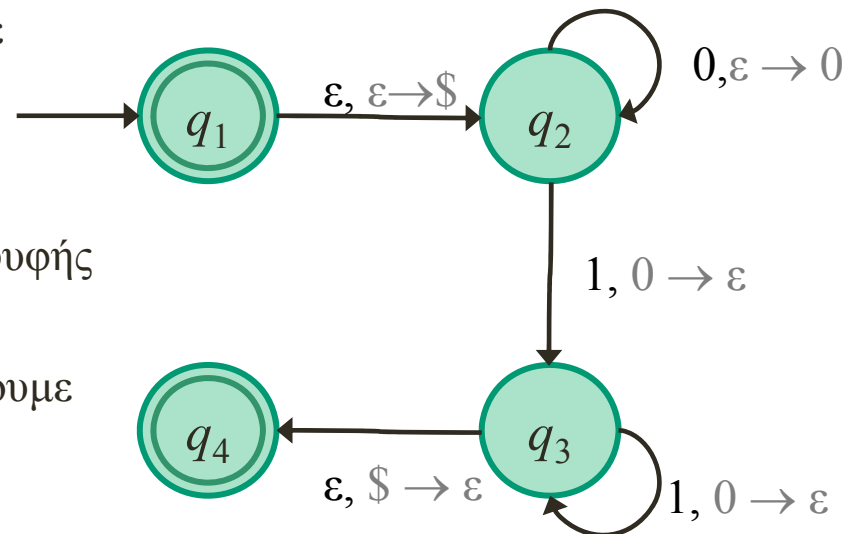
- Γλώσσα $L = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$
- Αυτόματο Στοίβας
 - $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$, $\Gamma = \{0, \$\}$, $F = \{q_1, q_4\}$



Παράδειγμα 1 (συν.)

- Εξήγηση:

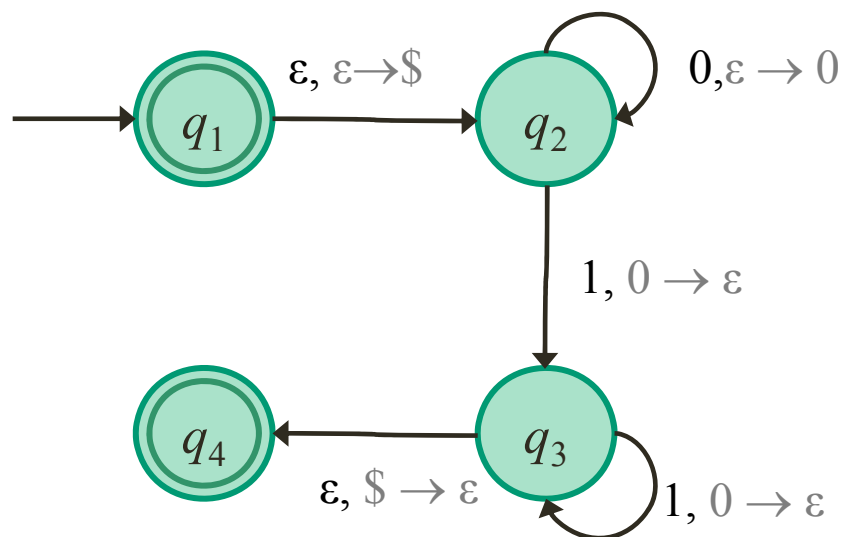
- Από την αρχική κατάσταση χωρίς να διαβάσουμε σύμβολο τοποθετούμε το \$ στη στοίβα – με αυτό τον τρόπο μπορούμε να αναγνωρίσουμε τον πάτο της.
- Από την q_2 για κάθε 0 που διαβάζουμε τοποθετούμε ένα 0 στη στοίβα χωρίς να ανασύρουμε οποιοδήποτε σύμβολο
- Από την q_2 αν διαβάσουμε 1 και εφόσον υπάρχει 0 στην κορυφή της στοίβας διαγράφουμε το 0 από τη στοίβα και προχωρούμε στην κατάσταση q_3
- Από την q_3 κάθε φορά που διαβάζουμε το 1 εφόσον υπάρχει 0 στη στοίβα ανασύρουμε τον κόμβο κορυφής.
- Όταν αδειάσει η στοίβα (ο κόμβος κορυφής είναι το σύμβολο \$) προχωρούμε στην τελική κατάσταση q_4 χωρίς να διαβάσουμε οποιοδήποτε σύμβολο.



Παράδειγμα 1 (συν.)

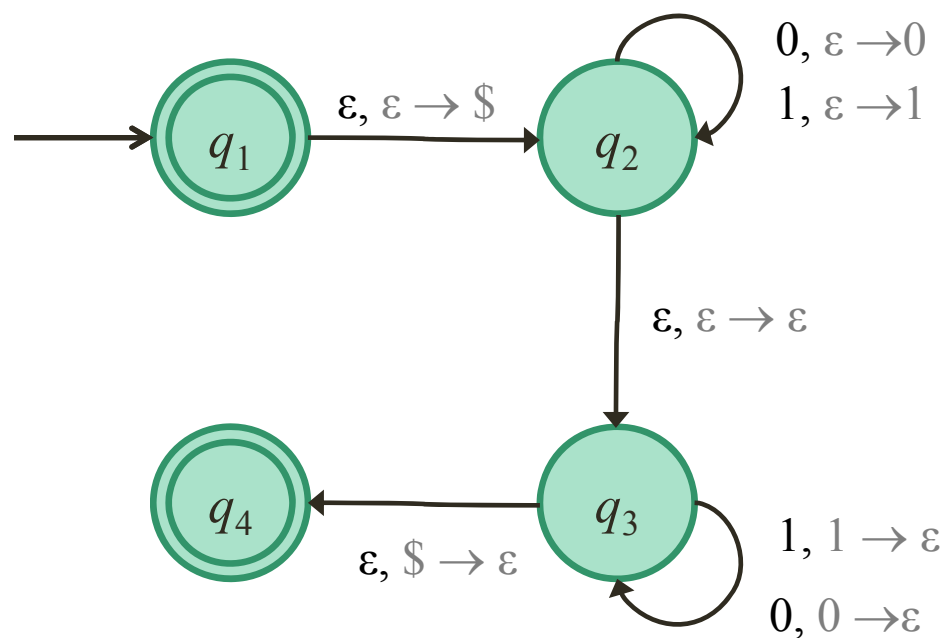
- Πίνακας μεταβάσεων

Είσοδος	0			1			ε		
	0	\$	ε	0	\$	ε	0	\$	ε
q_1									$\{(q_2, \$)\}$
q_2			$\{(q_2, 0)\}$	$\{(q_3, \epsilon)\}$					
q_3				$\{(q_3, \epsilon)\}$				$\{(q_4, \epsilon)\}$	
q_4									



Παράδειγμα 2

- Γλώσσα $L = \{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$
 - w^R : ανάστροφη π.χ. Αν $w = 0111$ τότε $w^R = 1110$



Ισοδυναμία PDA με CFG

ΘΕΩΡΗΜΑ

Μια γλώσσα είναι ασυμφραστική αν και μόνο αν υπάρχει αυτόματο στοίβας που την αναγνωρίζει.

ΛΗΜΜΑ 1

Αν μια γλώσσα είναι ασυμφραστική, τότε υπάρχει αυτόματο στοίβας που την αναγνωρίζει.

ΛΗΜΜΑ 2

Κάθε γλώσσα που αναγνωρίζεται από ένα αυτόματο στοίβας είναι ασυμφραστική.

Απόδειξη Λήμματος 1

ΛΗΜΜΑ 1

Αν μια γλώσσα είναι ασυμφραστική, τότε υπάρχει αυτόματο στοίβας που την αναγνωρίζει.

- Έστω A , μια ασυμφραστική γλώσσα
- Εξ' ορισμού παράγεται από κάποια ασυμφραστική γραμματική G .
- Στόχος: Να μετατρέψουμε τη γραμματική G σε ένα ισοδύναμο αυτόματο στοίβας P .
 - Το P πρέπει να αποδέχεται μια λέξη w αν και μόνο αν η w παράγεται από τη G .
- Δυσκολία: Ανά πάσα στιγμή δυνατόν να υπάρχουν >1 κανόνες αντικατάστασης για μια μεταβλητή.
 - Αυτό όμως μπορεί να αντιμετωπιστεί μέσω μη-ντετερμινισμού στο αυτόματο.

Βασική Ιδέα (1)

- Έστω η γραμματική

$$P \rightarrow aPb \mid abbQc$$

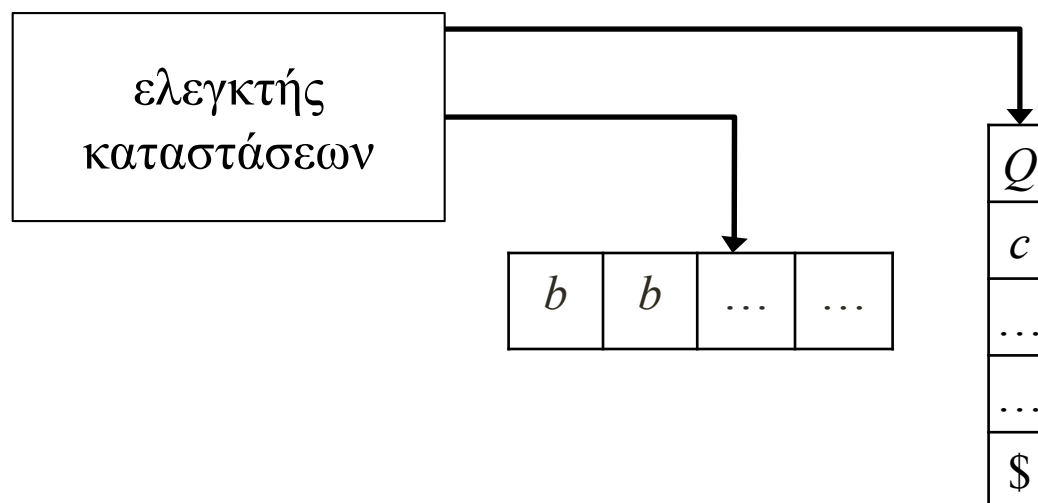
$$Q \rightarrow \dots$$

και η λέξη aab .

- Το αυτόματο θα πρέπει να ξεκινήσει με την αρχική μεταβλητή P και να κωδικοποιήσει μη-ντετερμινιστικά τους δύο κανόνες που αναφέρονται σε αυτή.
- Έτσι, με είσοδο a το αυτόματο θα πρέπει να έχει δύο εναλλακτικές μεταβάσεις:
 - Η πρώτη θα πρέπει να προχωρήσει σύμφωνα με το Pb , και
 - Η δεύτερη σύμφωνα με το $bbQc$.
- Και στις δύο περιπτώσεις θα αξιοποιήσουμε τη στοίβα:
 - Ενδιάμεσες λέξεις τοποθετούνται στη στοίβα
 - Με την εξαίρεση όποιων αρχικών τερματικών συμβόλων τα οποία συγκρίνονται απευθείας με τα σύμβολα που διαβάζονται από την είσοδο.

Βασική Ιδέα (2)

- Αν η ενδιαμέση λέξη είναι η $bbQc$ τότε
 - Θα τοποθετήσουμε στη στοίβα τα σύμβολα Qc
 - Ενώ θα περιμένουμε στην είσοδο την εμφάνιση των χαρακτήρων bb .



Η κατασκευή περιγραφικά

- Το αυτόματο μιμείται μια εξ'αριστερών παραγωγή της συμβολοσειράς εισόδου
- Βήμα 1: Αποθέτουμε στην στοίβα το ειδικό σύμβολο \$ και την εναρκτήρια μεταβλητή
- Βήμα 2: Επαναλαμβάνουμε τα ακόλουθα
 - Αν στην κορυφή της στοίβας έχουμε τη μεταβλητή A , επιλέγουμε μη-ντετερμινιστικά έναν από τους κανόνες του A και αντικαθιστούμε τη μεταβλητή με τη λέξη στο δεξί μέρος του κανόνα
 - Αν στην κορυφή της στοίβας είναι ένα τερματικό σύμβολο a , διαβάζουμε το επόμενο σύμβολο από την είσοδο και συγκρίνουμε με το a .
 - Αν τα σύμβολα συμπίπτουν τότε συνεχίζουμε
 - Διαφορετικά απορρίπτουμε (σε αυτό το μονοπάτι)
 - Αν στην κορυφή της στοίβας είναι το \$, πάμε στην κατάσταση αποδοχής.
 - Αν η λέξη εισόδου έχει εξαντληθεί τότε γίνεται αποδεκτή.

Εγγραφή λέξης στη στοίβα (1)

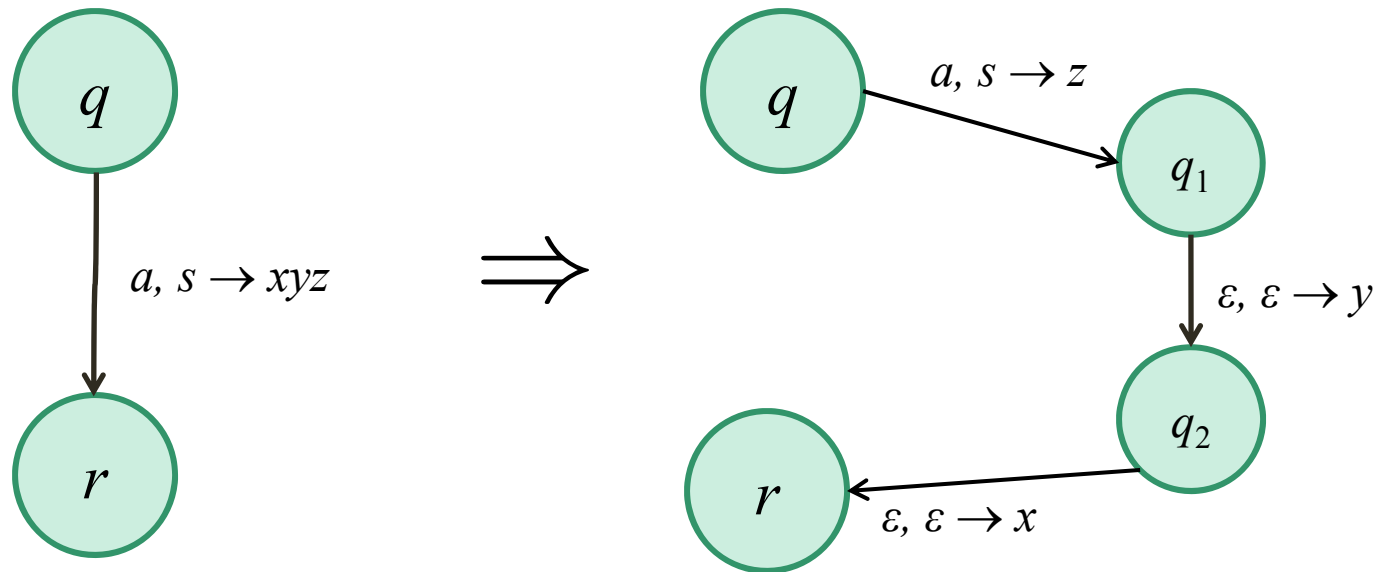
- Για υλοποίηση της πιο πάνω ιδέας, σε κάποια σημεία της κατασκευής του αυτομάτου στοίβας θα χρειάζεται να γράψουμε μια μη κενή λέξη.
- Αυτό δεν είναι συμβατό με τη συνάρτηση μεταβάσεων των αυτομάτων στοίβας $\delta: Q \times \Sigma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon \rightarrow P(Q \times \Gamma_\varepsilon)$.
- Για απλούστερη παρουσίαση της κατασκευής, εισάγουμε την εξής συντομογραφία.
- Γράφουμε $(r, u) \in \delta(q, a, s)$, όπου $u = u_1 \dots u_n$, για να δηλώσουμε ότι κάθε φορά που
 - βρισκόμαστε στην κατάσταση q ,
 - διαβάζουμε a στην είσοδο και
 - το s βρίσκεται στην κορυφή της στοίβας,θα μεταβαίνουμε στην r αφού αποθέσουμε στη στοίβα τη λέξη u .

Εγγραφή λέξης στη στοίβα (2)

- Αυτό τυπικά μπορεί να υλοποιηθεί εισάγοντας καινούριες καταστάσεις και γράφοντας ένα-ένα τα γράμματα της λέξης $u = u_1 \dots u_n$ στη στοίβα ξεκινώντας από το τελευταίο γράμμα και προχωρώντας προς το πρώτο:
- Βήμα 1: Εισάγουμε νέες καταστάσεις q_1, \dots, q_{n-1}
- Βήμα 2: Τροποποιούμε τη συνάρτηση μεταβάσεων
 - Προσθέτουμε στο $\delta(q, a, s)$ το μέλος (q_1, u_n)
 - Εισάγουμε τις μεταβάσεις
$$\delta(q_1, \varepsilon, \varepsilon) = \{(q_2, u_{n-1})\},$$
$$\dots$$
$$\delta(q_{n-1}, \varepsilon, \varepsilon) = \{(r, u_1)\}$$

Υλοποίηση συντομογραφίας

- Συντομογραφία: $(r, xyz) \in \delta(q, a, s)$
- Υλοποίηση:



Τυπική Περιγραφή Κατασκευής

- Το ζητούμενο αυτόματο στοίβας $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_{start}, \{q_{end}\})$ ορίζεται ως εξής:
- $Q = \{q_{start}, q_{loop}, q_{end}\} \cup E$
 - Όπου E είναι το σύνολο των καταστάσεων που απαιτούνται για τις αντικαταστάσεις των μεταβλητών με λέξεις
- Η συνάρτηση μεταβάσεων είναι η εξής:
 - $\delta(q_{start}, \epsilon, \epsilon) = \{(q_{loop}, \$)\}$

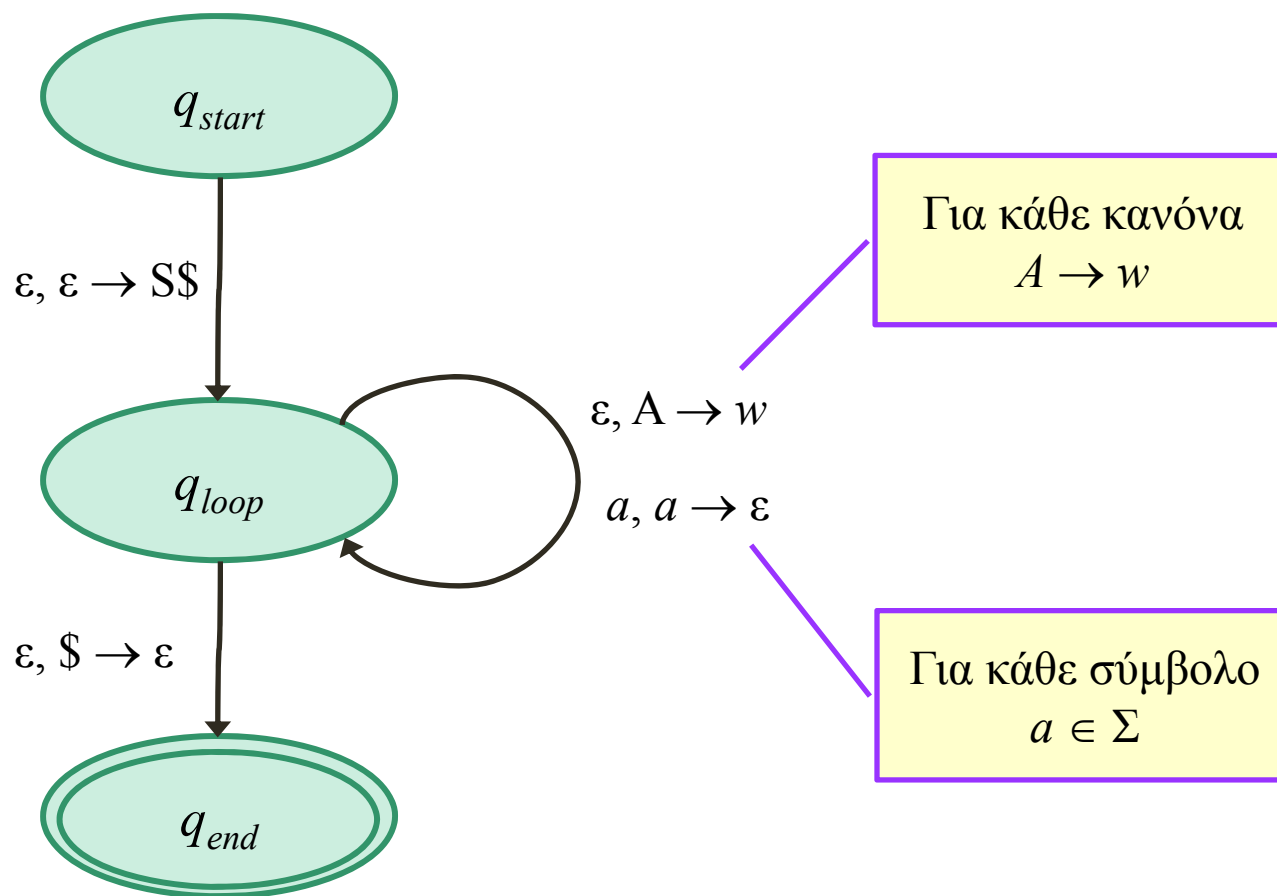
Εξήγηση: Αρχικά προσθέτουμε το σύμβολο $\$$ που δηλώνει ότι η στοίβα είναι κενή και την αρχική μεταβλητή S
 - $\delta(q_{loop}, \epsilon, A) = \{(q_{loop}, w) \mid \text{υπάρχει κανόνας } A \rightarrow w \text{ στη γραμματική}\}$

Εξήγηση: Αν η μεταβλητή A βρίσκεται στην κορυφή της στοίβας, δημιουργούμε μια μετάβαση για κάθε κανόνα παραγωγής της A . Για κάθε μετάβαση αντικαθιστούμε το A με τη σχετική λέξη.
 - $\delta(q_{loop}, a, a) = \{(q_{loop}, \epsilon)\}$

Εξήγηση: Αν το σύμβολο a βρίσκεται στην κορυφή της στοίβας τότε δημιουργούμε μετάβαση που αναμένει να λάβει το εν λόγω σύμβολο
 - $\delta(q_{loop}, \epsilon, \$) = \{(q_{end}, \epsilon)\}$

Εξήγηση: Αν το σύμβολο $\$$ βρίσκεται στην κορυφή της στοίβας τότε τερματίζουμε.

Κατασκευή – το διάγραμμα καταστάσεων



Παράδειγμα 1

- Να κατασκευάσετε αυτόματο στοίβας το οποίο να είναι ισοδύναμο με την πιο κάτω γραμματική.

$$P \rightarrow aTb \mid b$$

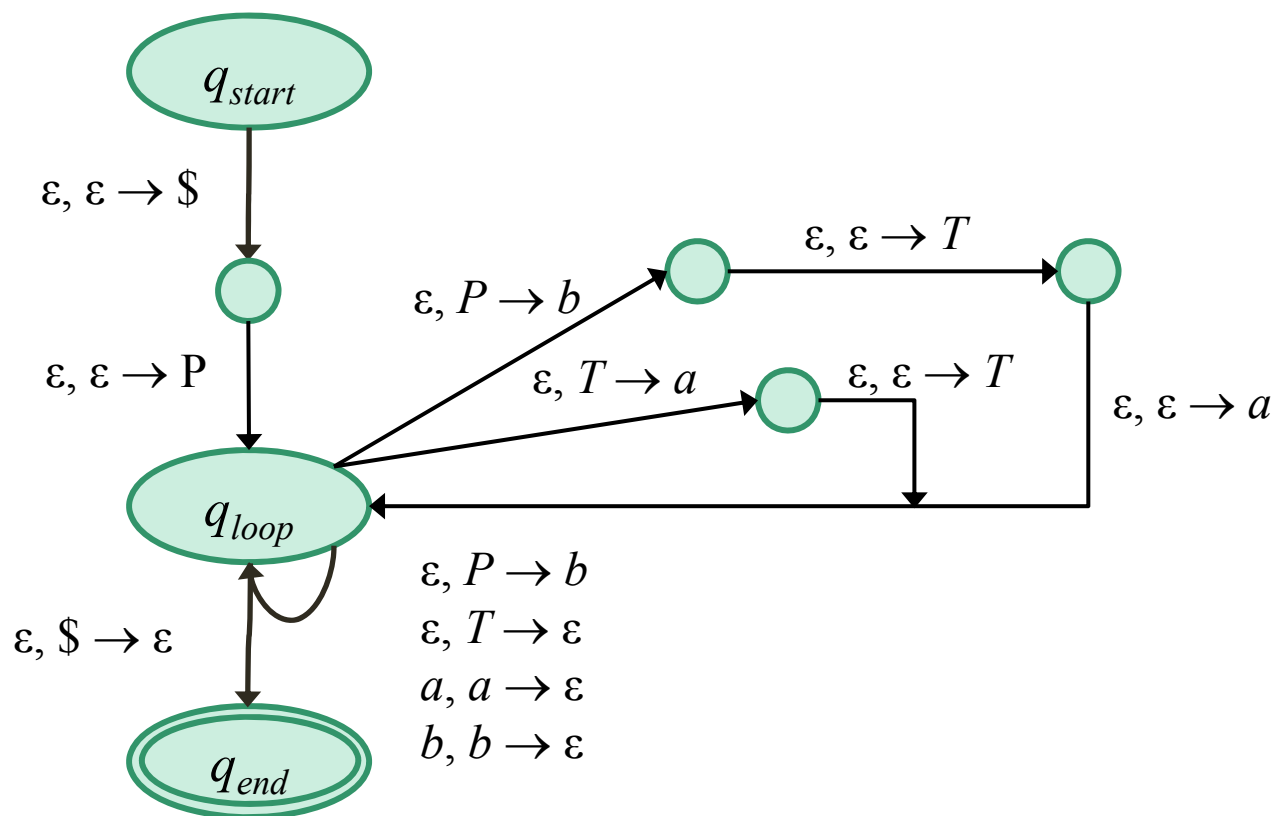
$$T \rightarrow Ta \mid \varepsilon$$

- Σύμφωνα με την κατασκευή που δημιουργήσαμε, το ισοδύναμο αυτόματο έχει τις εξής μεταβάσεις:

- $\delta(q_{start}, \varepsilon, \varepsilon) = (q_{loop}, P\$)$
- $\delta(q_{loop}, \varepsilon, P) = (q_{loop}, aTb)$
- $\delta(q_{loop}, \varepsilon, P) = (q_{loop}, b)$
- $\delta(q_{loop}, \varepsilon, T) = (q_{loop}, Ta)$
- $\delta(q_{loop}, \varepsilon, T) = (q_{loop}, \varepsilon)$
- $\delta(q_{loop}, a, a) = (q_{loop}, \varepsilon)$
- $\delta(q_{loop}, b, b) = (q_{loop}, \varepsilon)$
- $\delta(q_{loop}, \varepsilon, \$) = (q_{end}, \varepsilon)$

Παράδειγμα 1 (συν.)

- Αν αναλύσουμε τις μεταβάσεις που αναφέρονται σε λέξεις, το αυτόματο έχει ως εξής:



Παράδειγμα 2

- Να κατασκευάσετε αυτόματο στοίβας το οποίο να είναι ισοδύναμο με την πιο κάτω γλώσσα.

$$L = \{w\#w^R \mid w \in \{a,b\}^*\}$$

- Η γραμματική που παράγει τη γλώσσα είναι η

$$S \rightarrow aSa \mid bSb \mid \#$$

- Σύμφωνα με την κατασκευή που ορίσαμε, το ισοδύναμο αυτόματο έχει τις εξής μεταβάσεις:

$$- \delta(q_{start}, \epsilon, \epsilon) = (q_{loop}, S\$)$$

$$- \delta(q_{loop}, \epsilon, S) = (q_{loop}, bSb)$$

$$- \delta(q_{loop}, a, a) = (q_{loop}, \epsilon)$$

$$- \delta(q_{loop}, \#, \epsilon) = (q_{loop}, \epsilon)$$

$$- \delta(q_{loop}, \epsilon, S) = (q_{loop}, aSa)$$

$$- \delta(q_{loop}, \epsilon, S) = (q_{loop}, \#)$$

$$- \delta(q_{loop}, b, b) = (q_{loop}, \epsilon)$$

$$- \delta(q_{loop}, \epsilon, \$) = (q_{end}, \epsilon)$$

- Άσκηση: Δώστε αναλυτικά το ισοδύναμο αυτόματο που περιλαμβάνει όλες τις ενδιάμεσες καταστάσεις.

Λήμμα 2

ΛΗΜΜΑ 2

Κάθε γλώσσα που αναγνωρίζεται από ένα αυτόματο στοίβας είναι ασυμφραστική.

- Αποδεικτική Ιδέα: Να βρούμε μια κατασκευή μέσω της οποίας κάθε PDA να μεταφράζεται σε ασυμφραστική γραμματική.
- Κατασκευαστική Ιδέα:
 - Για κάθε ζεύγος καταστάσεων p, q του αυτόματου θα υπάρχει μια μεταβλητή A_{pq} που να παράγει όλες τις λέξεις που μπορούν να οδηγήσουν το αυτόματο από την p με κενή στοίβα στην q με κενή στοίβα.
- Απόδειξη Παραλείπεται.

Πόρισμα

- Κάθε κανονική γλώσσα είναι και ασυμφραστική
 - Αυτόματα στοίβας αναγνωρίζουν την κλάση των ασυμφραστικών γλωσσών
 - Πεπερασμένα αυτόματα αναγνωρίζουν τις κανονικές γλώσσες
 - Κάθε πεπερασμένο αυτόματο είναι αυτόματο στοίβας που αγνοεί την στοίβα.

